Lösungen der Übungsaufgaben zu **Kapitel 5**

Ü1:

a)

$486 = 1 \cdot 343+2 \cdot 49+6 \cdot 7+3 = 1 \cdot 7^3+2 \cdot 7^2+6 \cdot 7^1+3 \cdot 7^0 = (1263)_7$

$486 = 2 \cdot 196+6 \cdot 14+10 = 2 \cdot 14^2+6 \cdot 14^1+10 \cdot 14^0 = (26a)_{14}$

b)

$(32301)_4 = 3 \cdot 4^4+2 \cdot 4^3+3 \cdot 4^2+0 \cdot 4^1+1 \cdot 4^0 = 768+128+48+1 = 945$

$(cab)_{13} = 12 \cdot 13^2+10 \cdot 13^1+11 \cdot 13^0 = 2028+130+11 = 2169$

$(1283)_9 = 1 \cdot 9^3+2 \cdot 9^2+8 \cdot 9^1+3 \cdot 9^0 = 729+162+72+3 = 966$

Ü2:

a)

b = 6:

$$\begin{array}{r} 2\,1\,0\,4 \\ -1\,3\,2\,1 \\ {\scriptstyle 1\,1} \\ \hline 3\,4\,3 \end{array}$$

b)

b = 5:

$$\begin{array}{r} \underline{2\,3\,1\,4\,3 \cdot 4\,0\,4\,2\,1} \\ 2\,3\,1\,4\,3 \\ 1\,0\,1\,3\,4\,1 \\ 2\,0\,3\,2\,3\,2 \\ 0 \\ 2\,0\,3\,2\,3\,2 \\ {\scriptstyle 1\quad 1\,1\,2\,1\,1} \\ \hline 2\,1\,0\,4\,2\,4\,0\,3\,0\,3 \end{array}$$

<u>Anmerkung:</u>

Statt <u>dieser</u> Art der schriftlichen Multiplikation ist auch die Variante verbreitet, bei der als erstes die <u>erste</u> Ziffer des zweiten Faktors mit dem ersten Faktor multipliziert wird (hier: $4 \cdot 23143$).

Die schriftliche Rechnung sähe dann so aus:

$$\begin{array}{r} \underline{2\,3\,1\,4\,3 \cdot 4\,0\,4\,2\,1} \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ 0 \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \hline 2\,1\,0\,4\,2\,4\,0\,3\,0\,3 \end{array}$$

Natürlich erhält man bei dieser Variante dieselben Teilprodukte - nur in umgekehrter Reihenfolge - und damit dasselbe Ergebnis.

c)

b = 13:

$$\begin{array}{r} 1789 \\ +\ 655 \\ {\scriptstyle 111} \\ \hline 2111 \end{array}$$

d)

b = 6:

$$\begin{array}{l} 121143 : 313 = 231 \\ \underline{-1030} \\ \quad 1414 \\ \quad \underline{-1343} \\ \qquad 313 \\ \qquad \underline{-313} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Hilfreiche Produkte des Divisors: $2 \cdot 313 = 1030$, $3 \cdot 313 = 1343$

Ü3:

a)

Man nehme 1 Münze aus dem 1. Sack, 2 aus dem 2., ... und 10 Münzen aus dem 10. Sack. Nun werden alle entnommenen Münzen zusammen auf die Waage gelegt. Wären alle Münzen echt, würden sie $55 \cdot 10\text{g} = 550\text{g}$ wiegen. Fehlt nun 1g zu diesen 550g, so enthält offensichtlich Sack 1 die falschen Münzen, denn die Differenz von 1g rührt von <u>einer</u> Münze her (jede gefälschte Münze wiegt ja genau ein Gramm weniger als eine echte) und Sack 1 ist der einzige Sack aus dem genau eine Münze entnommen wurde. Entsprechend weist das Wiege-Ergebnis 543g darauf hin, daß der 7. Sack die gefälschten Goldstücke enthält, denn aus ihm sind 7 Goldstücke entnommen worden.
Damit gilt: Der n-te Sack enthält die falschen Münzen genau dann, wenn n Gramm zu 550g fehlen.

Bemerkung: Was hat diese Aufgabe mit Stellenwerten zu tun? Bisher gar nichts, das Spannende erwartet uns in Aufgabenteil b) !

b)

Man nehme 2^0 Goldstücke aus dem 1. Sack, 2^1 aus dem 2. Sack,... und 2^9 Goldstücke aus dem 10. Sack. Diese Münzen (immerhin 1023 Stück) werden gewogen und anschließend wird die Differenz zu $1023 \cdot 10\text{g}$ bestimmt. Anhand dieser Differenz läßt sich ablesen, welche der Säcke gefälschte Münzen enthalten:
Beträgt die Differenz beispielsweise 11g, so wandelt man zuerst 11 ins Zweiersystem um: $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, wobei es genügt, die Zahl als Summe von Zweierpotenzen zu schreiben.
Da die Anzahl der Münzen jeweils eine bestimmte Zweierpotenz war, läßt sich aus der Darstellung von 11 im Zweiersystem entnehmen, daß der 4. Sack (2^3 taucht auf), der 2. Sack (2^1) und der 1. Sack (2^0) gefälschte Münzen enthalten.

Nun könnte man daran zweifeln, ob diese Ermittlung wirklich <u>eindeutig</u> ist oder ob die Differenz 11 nicht auch noch andere Varianten zuläßt.

Tatsächlich ist diese Vorgehensweise eindeutig, und dieses läßt sich auf die Eindeutigkeit der b-adischen Darstellung zurückführen (Satz 5.1). Nach diesem Satz gibt es für eine beliebige Zahl (hier die jeweilige Differenz) und eine vorgegebene Basis (hier 2) eine eindeutige Darstellung.

Dieses Verfahren der Münzauswahl ist auch für andere Basen als 2 möglich, man könnte z.B. auch aus dem ersten Sack eine Münze, aus dem zweiten 5, aus dem dritten 25 ($= 5^2$) Münzen usw. auswählen und über die Darstellung einer Zahl im Fünfersystem argumentieren. 2 ist als Basis gewählt worden, weil sie die <u>kleinste</u> mögliche Basis darstellt und daher die Anzahl der ausgewählten Münzen nicht unrealistisch hoch wird.

Ü4:
Bei dieser Aufgabe wird vorausgesetzt, daß sich der/die Leser(in) mit dem Rechnen in b-adischen Systemen bereits vertraut gemacht hat. Ist dies nicht der Fall, so sollte vor dem Weiterlesen die Aufgabe Ü2 gelöst und die Erläuterung der Rechenverfahren in Unterkapitel 5.6 gelesen werden.

a)
$$\begin{array}{r} 6\,\mathbf{8}\,4\,2 \\ +\;6\,\mathbf{8}\,2\,7 \\ \hline 1\,0\,\mathbf{3}\,6\,9 \end{array}$$

Zunächst läßt sich festhalten, daß die größte auftretende Ziffer 9 ist und damit $b>9$ gilt, da die Ziffern in einem b-adischen System immer kleiner als die Basiszahl sind (vgl. S.132 im großen GEPAD).

Die entscheidende Spalte ist bei dieser Aufgabe, die dritte von links, da hier im Gegensatz zu den ersten beiden (von rechst betrachtet) ein <u>Übertrag</u> stattfindet und sich so eine Aussage über die Basis machen läßt, zu der gebündelt wird. Zu 8 Einheiten (genauer: 8 Bündel 2. Stufe oder 8 b^2) werden weitere 8 Einheiten hinzugefügt. Dabei wird augenscheinlich ein neues Bündeln notwendig: Es entsteht ein Bündel höherer Stufe (s. Bemerkung unten) und 3 bleiben übrig.
Da insgesamt (8+8 =) 16 Einheiten zusammengefügt wurden und nach dem Bündeln 3 Einheiten übrigbleiben, muß das Bündel (16–3 =) 13 Einheiten enthalten. Für die Basis kommt daher nur 13 in Frage.
Nun könnte es sein, daß in den letzten Spalten die Rechnungen für $b = 13$ nicht stimmen, dann gäbe es keine Basis, für welche die Rechnungen gelten. Deshalb muß durch Nachrechnen überprüft werden, ob die Rechnung tatsächlich für das gefundene b gilt.
Nachrechnen zeigt, daß die Rechnung für $b = 13$ und damit <u>nur</u> für $\mathbf{b = 13}$ gilt.

<u>Bemerkung</u>:
Woher weiß man, daß nur <u>ein</u> Bündel höherer Stufe, also ein Übertrag von 1, entsteht?
Bei der Addition von zwei Summanden kann sich nie ein Übertrag von 2 ergeben, da beide Summanden Ziffern des b-adischen Systems und damit kleiner als b sind. Werden diese Ziffern addiert, ist ihre Summe auf jeden Fall kleiner als $2 \cdot b$ ($= (20)_b$), die kleinste Summe, bei der ein Übertrag von 2 stattgefunden hat. Damit tritt maximal der Übertrag 1 auf.

b)

$$\begin{array}{r} 431\mathbf{2} \\ -\ \ 87\mathbf{7} \\ \hline 387\mathbf{9} \end{array}$$

Mit obiger Begründung läßt sich hier von vornherein festhalten, daß gilt $b>9$, da 9 als Ziffer in der Rechnung auftritt.
Bereits in der ersten Spalte (von rechts betrachtet) kommt es zu einem Übertrag: Von 2 (Einern) kann man nicht 7 Einer abziehen, also muß bei Lösung der Aufgabe die Einerziffer des Minuenden um b Einer erweitert worden sein (und der Subtrahend entsprechend um eine 1 in der zweiten Spalte). Damit steht die letzte Spalte für die Rechnung $2+b-7=9$, und es ergibt sich $b=14$.
Nachrechnen zeigt die Gültigkeit der Rechnung für $\mathbf{b}=\mathbf{14}$,
d.h. 14 ist die einzige in Frage kommende Basis.

Bemerkung:
Jede Subtraktion läßt sich in eine Addition überführen. Diese Aufgabe ist leichter lösbar, wenn statt dessen für die Rechnung $3879+877=4312$ alle möglichen Basen bestimmt werden. Das Typische des Subtraktionsverfahrens geht hierbei aber verloren, so daß hier auf diese Lösungsvariante verzichtet wurde.

c)

$$\begin{array}{r} 256\mathbf{5} \\ 104\mathbf{4} \\ +\ 215\mathbf{6} \\ \hline 613\mathbf{1} \end{array}$$

Analog zu oben kann man festhalten, daß für b nur Zahlen größer als 6 in Frage kommen, da 6 als Ziffer auftaucht.
In der ersten Spalte (von rechts) taucht bereits ein Übertrag auf, so daß es angebracht ist, hier mit der Bestimmung der Bündelzahl zu beginnen:
Es sind 5, 4 und 6 addiert worden, die erhaltene Summe ist dann neu gebündelt worden (da 5+4+6 in keinem System 1 ergibt), so daß sich Bündel höherer Stufe und ein Einzelner (die 1 in der Ergebniszeile) ergeben haben.

Wichtig ist nun, wie viele Bündel höherer Stufe in die nächste Spalte übertragen wurden. Während bei zwei Summanden wie in a) gezeigt nur ein Übertrag von 1 stattfinden kann, ist bei drei Summanden auch ein Übertrag von 2 möglich:
Jede der drei Ziffern ist maximal $b-1$, ihre Summe somit kleiner oder gleich $(b-1)+(b-1)+(b-1)=3b-3$. $3b-3$ ist aber kleiner $3b$, d.h. ein Übertrag von 3 oder mehr kann nicht vorkommen.

Daher gibt es zwei Möglichkeiten:

Übertrag 1: Dann ist $(5)_b+(4)_b+(6)_b=(11)_b \Leftrightarrow 5+4+6=b+1 \Leftrightarrow b=14$

Übertrag 2: Dann ist $(5)_b+(4)_b+(6)_b=(21)_b \Leftrightarrow 5+4+6=2b+1 \Leftrightarrow b=7$

Durchrechnen liefert, daß die Rechnung für $b=14$ bereits in der nächsten Zeile nicht mehr stimmen würden, da man bei einem Übertrag von 1 die Summe 6+4+5+1 erhalten würde, und diese beim Bündeln zu 14 statt 3 Einzelne 2 übrig läßt. Für $\mathbf{b}=\mathbf{7}$ gilt die Rechnung hingegen und 7 ist somit die einzige mögliche Basis.

d) $340 \cdot 211 = 105040$

Es gilt $b > 5$ mit obiger Begründung.
Bei Multiplikationen ist der Aufwand etwas höher: Man führt den Algorithmus der schriftlichen Multiplikation soweit wie möglich durch, d.h. man berechnet alle Produkte, deren Ergebnisse nicht größer als 5 sind, denn von größeren Zahlen kennt man ja die Zifferndarstellung in dem gesuchten System noch nicht:

$$\begin{array}{r} \underline{340 \cdot 211} \\ \mathbf{3}40 \\ 3\mathbf{4}0 \\ \underline{\bullet\bullet\bullet\mathbf{0}} \\ 105\mathbf{0}40 \end{array}$$

Die ersten beiden Teilprodukte und die letzte Ziffer des dritten lassen sich berechnen, ohne die Basis zu kennen. Bei der Addition der Teilergebnisse erhält man in der dritten Spalte (von rechts), daß die Summe von 3, 4 und 0 auf 0 endet, augenscheinlich ist gebündelt worden,

d.h. $(3)_b + (4)_b = (10)_b \Leftrightarrow 3+4 = b \Leftrightarrow \mathbf{b = 7}$

Nachrechen liefert, daß die Rechnung für diese Basis stimmt, also ist $b = 7$ die einzige Basis, für die diese Rechnung gilt.

e) $516 \cdot 324 = 212230$

Da 6 als Ziffer vorkommt, gilt $b > 6$.
Es wird genauso wie bei d) verfahren:

$$\begin{array}{r} \underline{324 \cdot 516} \\ \bullet\bullet\bullet\mathbf{0} \\ 324 \\ \underline{\bullet\bullet\bullet\bullet} \\ 212230 \end{array}$$

Es läßt sich nur die 2. Zeile berechnen (und auch nur dann, wenn man den Algorithmus auf $324 \cdot 516$ statt auf $516 \cdot 324$ anwendet). Weiterhin weiß man aber, daß die Summe in der ersten Zeile von rechts 0 beträgt. Da dort nur eine Ziffer auftritt, muß diese 0 sein, d.h. das Produkt der zugehörigen Multiplikation $6 \cdot 4$ endet auf 0.

Welche Möglichkeiten für den <u>Übertrag</u> gibt es?

Übertrag 1: $(4)_b \cdot (6)_b = (10)_b \Leftrightarrow b = 24$

Übertrag 2: $(4)_b \cdot (6)_b = (20)_b \Leftrightarrow b = 12$

Übertrag 3: $(4)_b \cdot (6)_b = (30)_b \Leftrightarrow b = 8$

Übertrag 4: $(4)_b \cdot (6)_b = (40)_b \Leftrightarrow b = 6$

Größere Überträge sind nicht möglich, da dann die Basis kleiner als 6 sein würde, diese aber wie oben festgestellt größer als 6 sein muß. Aus demselben Grund ist $b = 6$ nicht möglich.

Für $b = 24$ und $b = 12$ gilt die Rechnung bereits in der nächsthöheren Spalte nicht mehr, für $\mathbf{b = 8}$ hingegen stimmt sie; 8 ist daher die einzige mögliche Basis.

f) $204215 : 324 = 423$

Jede Division läßt sich in eine Multiplikation überführen (vgl. Bemerkung zur Subtraktion in Aufgabenteil b)). Da die Division in anderen Stellenwertsystemen besonders schwierig ist (wie in Ü2 festzustellen war), bietet es sich an, statt der vorgegebenen Division die Rechnung $324 \cdot 423 = 204215$ auszuführen:

Da 5 als Ziffer vorkommt, gilt $b > 5$.

$$\begin{array}{r} \underline{3\,2\,4 \cdot 4\,2\,3} \\ \mathbf{5} \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\quad \\ \underline{\bullet\bullet\bullet\bullet\quad\quad} \\ 2\,0\,4\,2\,1\,5 \end{array}$$

Tatsächlich läßt sich <u>keines</u> der Teilprodukte berechnen.
Man weiß aber zumindest, daß die Summe in der ersten Zeile von rechts 5 beträgt. Da dort nur eine Ziffer auftritt, muß diese 5 sein, d.h. das Produkt der zugehörigen Multiplikation $3 \cdot 4$ endet auf 0. Welche Möglichkeiten für den <u>Übertrag</u> gibt es?

Übertrag 1: $(3)_b \cdot (4)_b = (15)_b \quad \Leftrightarrow \quad 12 = b+5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 7$

Übertrag 2: $(3)_b \cdot (4)_b = (25)_b \quad \Leftrightarrow \quad 12 = 2b+5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 3{,}5$

Der Übertrag 2 sowie noch größere Überträge kommen nicht in Betracht, da b > 5 gelten muß. Daher ist $b = 7$ die einzige in Frage kommende Möglichkeit.

Achtung!
Das Nachrechnen zeigt, daß die Rechnung für diese Basis <u>nicht</u> stimmt. Während das Ergebnis in der zweiten Spalte (von rechts) noch für $b = 7$ gültig ist, ergibt sich in der dritten Spalte ein Widerspruch:

$$\begin{array}{r} \underline{3\,2\,4 \cdot 4\,2\,3} \\ 1\,3\,0\,5 \\ 6\,5\,1\quad \\ \underline{1\,6\,3\,2\quad\quad} \\ 2\,0\,4\,\mathbf{3}\,1\,5 \end{array}$$

$3+5+2 = 10 = (1\mathbf{3})_7$,
d.h. nach der Bündelung bleibt ein Rest von 3, während in der Ergebniszeile 2 vermerkt ist.

Da 7 die einzige in Frage kommende Basis war, aber die Rechnung für $b = 7$ nicht gilt, gibt es **keine Basis**, für welche die Rechnung stimmt.

Ü5:

$$\begin{array}{rll} & (143)_b = 99 & \\ \Leftrightarrow & b^2+4b+3 = 99 & \\ \Leftrightarrow & b^2+4b+2^2 = 100 & \text{(Quadratische Ergänzung, vgl. Kap. 1.7)} \\ \Leftrightarrow & (b+2)^2 = 100 & \text{(Binomische Formel)} \\ \Leftrightarrow & |b+2| = 10 & \text{(Wurzelziehen)} \\ \Leftrightarrow & b+2 = 10 \vee -(b+2) = 10 & \text{(def. Betrag)} \\ \Leftrightarrow & b = 8 \vee b = -12 & \end{array}$$

$b = -12$ scheidet als Lösung aus, da für jede Basis b gilt: $b \geq 2$.

Somit ist $\mathbf{b = 8}$ die einzige Lösung der Aufgabe.

Ü6:

a)

Es gilt $b > 3$, da 3 als Ziffer vorkommt.

$$\begin{array}{r} 2\,1\,0 \\ +\ 1\,0\,2 \\ \hline 3\,1\,2 \end{array}$$

Bei der schriftlichen Addition ergeben sich keine Überträge. Die Rechnung führt daher unabhängig von der jeweiligen Wahl von b auf die Lösung 312. Die Gleichung gilt daher **für alle b-adischen Systeme mit b>3**.

b)

Wiederum gilt: $b > 3$

$$\begin{array}{r} \underline{1\,1 \cdot 1\,3} \\ 3\,3 \\ \underline{1\,1} \\ 2\,0\,3 \end{array}$$

Die Multiplikationen lassen sich alle ohne Übertrag durchführen. Beim Addieren der Ziffern der zweiten Spalte muß hingegen ein Übertrag nötig gewesen sein: Da die Summe von 3 und 1 in keinem System 0 ist, bezeichnet 0 den Einerrest nach einer neuen Bündelung. Es muß demnach gelten:

$(3)_b + (1)_b = (10)_b \iff 3+1 = b \iff \mathbf{b = 4}$

In der nächsten Spalte wird dann der Übertrag 1 notiert, und es zeigt sich, daß auch die weitere Rechnung für $b = 4$ gilt.

c)

$132:11 = 12 \iff 12 \cdot 11 = 132$ (vgl. Kommentar zu Ü5 f))

Es gilt auch hier: $b > 3$

$$\begin{array}{r} \underline{1\,2 \cdot 1\,1} \\ 1\,2 \\ \underline{1\,2} \\ 1\,3\,2 \end{array}$$

Wie bei a) zeigt sich, daß die Rechnung unabhängig von der Wahl von b gilt. Somit gilt die Gleichung **für alle Stellenwertsysteme mit b>3**.

Ü7:

Diese Frage läßt sich mit kombinatorischen Überlegungen (vgl. Kap.10) lösen.

vierstellige Zahlen im 3er-System:

Es stehen die Ziffern 0, 1 und 2 zur Verfügung.

Für die 1.Stelle: 2 Möglichkeiten (1 oder 2; 0 kann nicht an erster Stelle vorkommen, wenn es sich um eine dreistellige Zahl handeln soll)

Für die 2. Stelle: 3 Möglichkeiten (0,1 oder 2)
Für die 3. und 4. Stelle ergeben sich ebenfalls 3 Möglichkeiten

Da die Möglichkeiten für die einzelnen Stellen untereinander kombiniert werden müssen, werden nach dem 🕮 Multiplikationsprinzip die Teilergebnisse multipliziert:
Insgesamt gibt es daher $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{54}$ verschiedene vierstellige Zahlen im Dreiersystem.

<u>dreistellige Zahlen im 4er-System:</u>
Es stehen die Ziffern 0, 1, 2 und 3 zur Verfügung.
Analog zur Berechnung der vierstelligen Zahlen ergeben sich hier $3 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{48}$ Möglichkeiten, d.h. es gibt mehr vierstellige Zahlen im 3er-System als dreistellige Zahlen im 4er-System.

Ü8:
a)
Die Struktur dieses Beweises an der 🕮 Stellentafel wird in Unterkapitel 6.8.1 ausführlich erklärt, der Beweis der Teilbarkeitsregel für 9 wird jedoch nicht formal durchgeführt. Vor allem wird dort auf eine <u>Verallgemeinerung</u> der an einem Beispiel entwickelten Vorgehensweise auf beliebige Zahlen verzichtet. Auch hier soll kein streng formaler Beweis geführt werden, sondern die <u>Allgemeingültigkeit</u> des Verfahrens an der Stellentafel begründet werden.
Dem/der Leser(in) sei geraten, sich zuerst mit der in 6.8.1 vorgestellten Herleitung vertraut zu machen.

Eine beliebige Zahl n sei durch Plättchen in der Stellentafel dargestellt. Nun sollen alle Plättchen von ihrem jeweiligen Standort in die Einer-Spalte verschoben werden. Ändert sich dabei die Teilbarkeit der Zahl durch 9?

Zunächst soll untersucht werden, was passiert, wenn jedes Plättchen eine Spalte nach rechts verschoben wird. Wie in 6.8.1 beschrieben, werden aus Zehnern Einer, aus Hundertern Zehner, aus Tausendern Hunderter usw. Für jeden Zehner, um den die Zahl vermindert wird, kommt dadurch ein Einer hinzu, d.h. die Zahl ändert sich um 9 bzw. bei mehreren Verschiebungen um ein Vielfaches von 9. Für jeden Hunderter, um den die Zahl vermindert wird, kommt ein Zehner hinzu, d.h. die Zahl verändert sich um 90 bzw. um ein Vielfaches von 90, falls mehrere Hunderterplättchen verschoben werden. Da 90 eine Vielfaches von 9 ist, ändert sich die Zahl also insgesamt um ein Vielfaches von 9.

Dieses Verfahren läßt sich genauso bei größeren Zehnerpotenzen durchführen.

<u>Allgemein</u> gilt:
Wird ein Plättchen von der 10^k-Spalte in die 10^{k-1}-Spalte verschoben, so bedeutet dieses, daß die Zahl um 10^k vermindert wird und 10^{k-1} hinzukommt.

Das ist eine Veränderung um
$$\begin{aligned} -10^k+10^{k-1} &= 10^{k-1} \cdot (-10+1) \qquad \text{(DIST, Pot.ges.)} \\ &= 10^{k-1} \cdot (-9) \\ &= -10^{k-1} \cdot 9 \end{aligned}$$

Die Zahl wird also um ein Vielfaches von 9 vermindert. Da ein Vielfaches von 9 aber den Neunerrest 0 läßt, hat die zu untersuchende Zahl n denselben Neunerrest wie die um ein Vielfaches von 9 verminderte Zahl.

Dieses Vorgehen wird nun solange wiederholt, bis sich alle Plättchen in der Einer-Spalte befinden.

Die Zahl, die aus so vielen Einern besteht, wie insgesamt Plättchen vorhanden sind, läßt nach obigen Überlegungen denselben Neunerrest wie die zu untersuchende Zahl selbst. Bei dieser Zahl handelt sich genau um die 🕮 Quersumme der Zahl, und man erhält die Reste-Regel:

Eine Zahl läßt denselben Neunerrest wie ihre Quersumme.

Insbesondere bedeutet dies: Eine Zahl läßt genau dann den Neunerrest 0, wenn ihre Quersumme den Neunerrest 0 läßt.

Auf die Teilbarkeit durch 9 zugespitzt bedeutet dies:

Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

(für eine formalere Notation vgl. 🕮 Neunerregel in Unterkap. 6.8.1)

t

b)
In der Stellentafel zum 8er-System entspricht das Verschieben eines Plättchens in die rechte Nachbarspalte entsprechend den Ausführungen in Aufgabenteil a):
$-8^k+8^{k-1} = 8^{k-1}\cdot(-8+1) = 8^{k-1}\cdot(-7) = -8^{k-1}\cdot 7$

Mit obigen Überlegungen bedeutet dies, daß die Zahl, die entsteht, wenn alle Plättchen in die Einer-Spalte verschoben werden, denselben Rest bei Division durch 7 läßt wie die Ausgangszahl selbst. Da es sich bei der entstandenen Zahl um die Quersumme der Zahl handelt, erhält man damit folgende Quersummenregel:

Eine Zahl im 8er-System ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 7 teilbar ist.

t

Bemerkung:
Diese Regel läßt sich auf beliebige Stellenwertsysteme verallgemeinern (und mit analogen Überlegungen beweisen):

Eine Zahl im b-System ist genau dann durch b-1 teilbar, wenn ihre Quersumme durch b - 1 teilbar ist.

Ü9:
Es legen Lebkuchen in Sechser-Packungen vor, die wiederum in Sechser-Kartons verpackt sind, usw.
Jemand möchte nun wissen, ob die Anzahl der verpackten Lebkuchen durch 3 teilbar ist (z.B. um sie gerecht zu verteilen). Offensichtlich ist die Anzahl der Lebkuchen in vollständigen Packungen auf jeden Fall durch 3 teilbar, da jede Packung $2\cdot 3$ Lebkuchen enthält. Ob die Verteilung aufgeht, hängt also ausschließlich von den nicht verpackten Lebkuchen ab.

Etwas weniger weihnachtlich läßt sich diese Idee wie folgt entwickeln:

Eine beliebige Zahl n hat im 6er-System folgende Darstellung:

$n = a_k \cdot 6^k + a_{k-1} \cdot 6^{k-1} + ... + a_1 \cdot 6^1 + a_0$

mit $a_i \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le a_i < 6$ für $i \in \{0,1,2,...,k\}$ und $a_k \ne 0$ (vgl. Satz 5.1)

Für eine derart dargestellte Zahl soll nun eine Teilbarkeitsregel für 3 bewiesen werden:

Da $3 | 6$ gilt, hängt die Teilbarkeit von n nicht von den 6er-Potenzen und auch nicht von den Vielfachen der 6er-Potenzen ab, sondern einzig und allein von a_0 (das ist die Anzahl der nicht verpackten Lebkuchen).

Mit 🕮 Kongruenzen (man vgl. auch Ü20 aus Kap. 6) läßt sich der formale Beweis dann so führen:

$6^1 \equiv 0\ (3)$

$\Rightarrow\ 6^i \equiv 0^i\ (3)$ mit $i \in \{1,2,...,k\}$ (Potenzieren von Kongruenzen)

$\Rightarrow\ 6^i \equiv 0\ (3)$ mit $i \in \{1,2,...,k\}$

Somit lassen sich alle 6er-Potenzen durch Null ersetzen, ohne daß sich der Rest bei Division durch 3 verändert:

$6^1 \equiv 0\ (3) \wedge 6^2 \equiv 0\ (3) \wedge ... \wedge 6^k \equiv 0\ (3)$

$\Rightarrow\ a_1 \cdot 6^1 \equiv 0\ (3) \wedge a_2 \cdot 6^2 \equiv 0\ (3) \wedge ... \wedge a_k 6^k \equiv 0\ (3)$ (Mult. v. Kongr., $a_1 \equiv a_1\ (3)$, $a_2 \equiv a_2\ (3)$ usw.)

$\Rightarrow\ a_k \cdot 6^k + a_{k-1} \cdot 6^{k-1} + ... + a_1 \cdot 6^1 \equiv 0\ (3)$ (Add. v. Kongr.)

$\Rightarrow\ a_k \cdot 6^k + a_{k-1} \cdot 6^{k-1} + ... + a_1 \cdot 6^1 + a_0 \equiv a_0\ (3)$ (Add. v. Kongr., $a_0 \equiv a_0\ (3)$)

$\Rightarrow\ n \equiv a_0\ (3)$

d.h. n läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie a_0 ,

d.h. insbesondere n läßt genau dann den Dreierrest 0, wenn a_0 den Dreierrest 0 läßt,

anders ausgedrückt: Eine Zahl n im 6er-System ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer (a_0) durch 3 teilbar ist.

In Zeichen:
Sei $n = a_k \cdot 6^k + a_{k-1} \cdot 6^{k-1} + ... + a_1 \cdot 6^1 + a_0$. Dann gilt: $3 | n \Leftrightarrow 3 | a_0$

t

Ü10:
Die Aufgabe soll herausstellen, daß es wichtig ist, genau zu unterscheiden zwischen Eigenschaften, die eine Zahl unabhängig von ihrer Darstellung hat, und solchen, die nur eine bestimmte Darstellung der Zahl betreffen.

a)
Die Eigenschaft einer Zahl, genau zwei Teiler zu haben, ändert sich nicht mit der Darstellung der Zahl.

Eine Zahl, die z.B. im Zehnersystem diese Eigenschaft besitzt und deswegen Primzahl genannt wird, verliert diese nicht, wenn man ihr einen anderen Namen gibt, sie also beispielsweise in einem anderen System darstellt. Die Aussage ist daher in jedem b-adischen System gültig.

b)
Die Quersumme einer Zahl ist abhängig von der Zifferndarstellung der Zahl; diese verändert sich jedoch bei der Darstellung der Zahl in einem anderen System.
Wenn eine Zahl im Zehnersystem durch 9 teilbar ist, so ist sie das (den Überlegungen von a) folgend) immer noch, wenn sie in einem anderen System dargestellt wird. Während aber die Quersumme einer durch 9 teilbaren Zahl im dekadischen System immer durch 9 teilbar ist, muß das nicht für die Quersumme der Zifferndarstellung in einem anderen System gelten. Die Aussage ist deshalb nicht in jedem b-adischen System gültig.

c)
Die Aussage $2 \mid k \Rightarrow 2 \mid k^2$ ist eine Eigenschaft, welche die Zahlen k unabhängig von ihrer Darstellung besitzen (sie kann z.B. mit einem Punktmuster-Beweis gezeigt werden). Die Aussage gilt damit in jedem b-adischen System.

d)
Wird zum Beispiel 4 im Sechsersystem mit zehn multipliziert, so erhält man wegen $10 = (14)_6$: $(4)_6 \cdot (14)_6 = (104)_6$, d.h. die Aussage kann nicht für alle b-adischen Systeme gelten.
Die Aussage gilt allerdings, wenn man statt „mit zehn multipliziert" „mit 10 („eins-null") multipliziert" schreibt. Gemeint ist damit die Ziffernfolge 10 in dem entsprechenden b-adischen System. Um Verwechslungen mit der Zehn im dekadischen System zu vermeiden, sollte besser $(10)_b$ geschrieben werden. $(10)_b$ ist aber b $\left((10)_b = 1 \cdot b^1 + 0 \cdot b^0\right)$ und es gilt:

In einem beliebigen b-adischen System wird eine Zahl mit b multipliziert, indem man an die Zifferndarstellung der Zahl eine 0 anhängt.

Dies läßt sich schnell über die Multiplikation einer beliebig gewählten Zahl mit b zeigen (worauf hier verzichtet wird, da es weit über die Aufgabenstellung hinausgeht).

Ü11:

$$
\begin{aligned}
& (abcabc)_{10} \\
= \ & a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 \\
= \ & (a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c) \cdot 10^3 + (a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c) \cdot 10^0 && \text{(Potenzges., DIST)} \\
= \ & (a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c) \cdot (10^3 + 10^0) && \text{(DIST)} \\
= \ & (a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c) \cdot (1001)
\end{aligned}
$$

Da $(a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c) \in \mathbb{N}$, folgt mit der Definition Teilbarkeit (vgl. Unterkap. 6.3.1): $1001 \mid (abcabc)_{10}$

Anschaulicher erhält man die Teilbarkeitsbeziehung wie folgt:

$(abcabc)_{10}$
$= (abc000)_{10} + (abc)_{10}$
$= 1000 \cdot (abc)_{10} + 1 \cdot (abc)_{10}$
$= (1000 + 1) \cdot (abc)_{10}$ (DIST)
$= 1001 \cdot (abc)_{10}$

Hieran kann nun dieselbe Argumentation wie oben anknüpfen.

Zusatzaufgabe:
Wenn sich die Person beispielsweise die Zahl 19 merkt, so muß sie angeben, daß sich die von ihr gedachte Zahl auf den Karten 1, 2 und 5 befindet. Der „Zauberer" braucht dann nur die jeweils erste Zahl jeder genannten Karte addieren und erhält mit 1+2+16 die gedachte Zahl.

Woran liegt das?

Der „Zaubertrick" basiert auf denselben Überlegungen wie die Auswahl der Münzen in Ü3 b).
1, 2 und 16 sind genau die Zweierpotenzen, die in der Dualdarstellung von 19 auftauchen: $19 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
Wenn man nun die erste Zahl jeder Karte betrachtet, stellt man fest, daß es sich hier um die ersten fünf Zweierpotenzen 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 handelt. Nun stehen auf Karte 3 z.B. alle Zahlen kleiner als 32, in deren Dualdarstellung die Zweierpotenz 2^2 auftaucht, auf Karte 4 alle diejenigen Zahlen kleiner als 32, in deren Dualdarstellung die Zweierpotenz 2^3 auftaucht usw. Wenn die betreffende Person die Karten benennt, auf denen sich die von ihr gedachte Zahl befindet, weiß der Zauberer, welche Zweierpotenzen in der Dualdarstellung der Zahl auftauchen. Er muß jetzt lediglich noch die Zweierpotenzen addieren und erhält die gedachte Zahl.
Da im Zweiersystem als Ziffern nur Einsen oder Nullen auftauchen, weiß der „Zauberer" immer, wie häufig die Zweierpotenz in der Zahl vorkommt:
Wird eine Karte nicht genannt, so kommt die entsprechende Zweierpotenz nullmal, also gar nicht vor. Wird sie genannt, so kommt die entsprechende Zweierpotenz genau einmal vor.
(Anmerkung: Aus dieser Überlegung folgt, daß der Trick nicht mit anderen Potenzen funktioniert.)

Das Verfahren funktioniert immer <u>eindeutig</u>, da die Darstellung einer Zahl im Dualsystem eindeutig ist (Satz 5.1) und es somit nur <u>eine</u> Darstellung einer Zahl als Summe von Zweierpotenzen gibt.
Daß nur Zahlen bis 31 ausgewählt werden können, liegt daran, daß 31 die größte Zahl ist, die sich mit den ersten 5 Zweierpotenzen darstellen läßt. Wenn man eine sechste Karte hinzunimmt, kann man immerhin schon aus den Zahlen 1 bis 63 auswählen lassen.