# Lösungen der Übungsaufgaben zu **Kapitel 4**

**Ü1**:

Dies ist eine scheinbar triviale Aussage. Gerade bei solchen Aufgaben weiß man deshalb oft nicht, wie man den Beweis beginnen soll. Stellt man sich aber die Frage, was passieren würde, wenn es neben der 1 eine weitere Zahl ohne Vorgänger - nennen wir sie e - geben würde, so ist bereits der erste Schritt getan, denn diese Frage ist bereits der Beginn eines indirekten Beweises. Macht man sich nun ein Bild von dieser - angenommenen - Konstellation, so kann man relativ schnell erkennen, warum diese Konstellation den Peano-Axiomen widersprechen muß:

**1**
$\bullet \rightarrow \bullet \ldots$ Es müßte zwei „Kettenstränge“ geben, deren weiterer
$\bullet \rightarrow \bullet \ldots$ Verlauf nicht bekannt, aber auch nicht relevant ist.
**e**

Wir hatten auf Seite 92 im großen GEPAD herausgearbeitet, daß die einzig mögliche Darstellung der natürlichen Zahlen in der vereinbarten Form mit Punkten und Pfeilen die folgende ist:

**1**
$\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \ldots$

Man kann nun also ähnlich wie auf Seite 91/92 im großen GEPAD argumentieren, daß die oben angenommene Konstellation P3 widerspricht.

Formal sieht der Beweis dann so aus:

**Ann.:** $\exists e \in \mathbb{N}: \big( e \neq 1 \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N}: (n' \neq e) \big)$

e soll nicht die 1 sein und darf keinen Vorgänger haben, d.h. e darf nicht Nachfolger irgendeiner anderen nat. Zahl sein.

Betrachte die Menge $T := \mathbb{N} \setminus \{e\}$ :

Dies ist eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen. Das Beweisziel ist nun, zu zeigen, daß diese Menge T beide Bedingungen aus P3 erfüllt und somit alle natürlichen Zahlen enthalten müßte.

$e \neq 1 \ \Rightarrow \ 1 \in T$ d.h. T erfüllt Bedingung (i).

Sei $k \in T$ beliebig gewählt (d.h. insbesondere $k \in \mathbb{N}$).
Wir betrachten nun k':

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $k' \neq e$ | (Ann.) | |
| $\Rightarrow$ | $k' \in T$ | (def. T) | d.h. T erfüllt Bedingung (ii). |

Also muß nach P3 gelten: $T = \mathbb{N}$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn in $\mathbb{N}$ ist e enthalten, in T nicht, und gleiche Mengen müssen in jedem Element übereinstimmen.

Also ist die Annahme falsch und somit ist 1 die einzige natürliche Zahl ohne Vorgänger.

t

**Ü2**:

Die folgenden Modelle erfüllen jeweils die in der Formulierung der Peano-Axiome genannten Voraussetzungen, wie leicht zu überprüfen ist.

a)

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{1} \qquad\qquad\quad \mathbf{a} \\
\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \nearrow \\
\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \\
\qquad\qquad\quad \mathbf{a^*}
\end{array}
$$

1 ist nicht Nachfolger irgendeines anderen Elementes, d.h. P1 gilt.
Es gibt zwei verschiedene Elemente a und $a^*$ mit demselben Nachfolger, d.h. P2 ist nicht erfüllt.
Die Teilmenge, die alle Elemente des <u>oberen</u> „Kettenstranges" enthält, erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) aus P3, enthält aber dennoch nicht alle Elemente der vorgegebenen Menge, d.h. P3 gilt nicht.

b) **1**

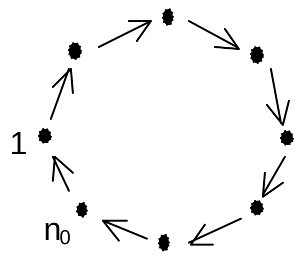
$$\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \ldots$$

1 ist Nachfolger eines Elementes der Menge, d.h. P1 gilt nicht.
Es gibt keine zwei verschiedenen Elemente mit demselben Nachfolger, d.h. P2 gilt.
Die Teilmenge die einschließlich dem Element 1 alle Elemente rechts von 1 enthält, erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) aus P3, enthält aber nicht alle Elemente aus der vorgegebenen Menge, da das linke Element, der Vorgänger von 1, nicht in dieser Teilmenge enthalten ist. Also kann P3 nicht gelten.

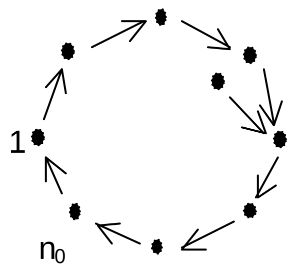
c)
Das zweite Beispiel auf Seite 92 des großen GEPAD ist ein Modell, das die geforderten Eigenschaften hat. Dort ist auch in aller Ausführlichkeit erläutert, daß P1 und P2 gelten. In der Lösung zu **A3** (Seite 94 des großen GEPAD) findet sich die Begründung, daß P3 nicht gilt.

d)
Diese Aufgabe wird denjenigen, die sich gewissenhaft auf die Suche nach einer Lösung gemacht haben, einiges Kopfzerbrechen bereitet haben, denn es gibt kein Modell, das die geforderten Eigenschaften hat. Das zunächst von uns anvisierte Modell mit nur einem Element, der 1, die Nachfolger von sich selbst ist, erfüllt zwar P3 und nicht P1, aber P2 gilt trotzdem, denn es gibt keine zwei verschiedenen Elemente mit demselben Nachfolger.
Man kann nun beweisen, daß für jede Menge A, die die in der Formulierung der Peano-Axiome geforderten Voraussetzungen erfüllt, und für die P3 gilt, stets auch mindestens eines der beiden anderen Axiome gelten muß. Dieser Beweis ist aber, wird er formal korrekt geführt, sehr umfangreich und unübersichtlich, seine Wiedergabe ist wenig hilfreich. Wir begnügen uns deshalb an dieser Stel-

le damit, anschaulich zu begründen, daß ein solches Modell tatsächlich nicht existieren kann.
Wir nehmen an, daß es ein Modell gibt, in dem neben den Voraussetzungen nur P3 gilt, P1 und P2 hingegen nicht.
Die diesem Modell zugrundeliegende Menge A enthält mindestens die 1 (Vor.).
Die 1 hat aber einen Vorgänger $n_0$, denn sonst würde P1 ja gelten. Dieser Vorgänger ist verschieden von 1 (Falls die 1 ihr eigener Vorgänger wäre, handelte es sich um das Modell mit nur diesem einen Element, in dem ja P2 gilt).
Wir konstruieren nun eine Teilmenge von A wie folgt:
Die 1 soll zu dieser Teilmenge gehören. Der Nachfolger von der 1 ebenfalls. Dessen Nachfolger ebenfalls usw. usw. Mit jedem Element, das dazugehört, soll automatisch dessen Nachfolger dazugehören (man kann sich vorstellen, daß man nacheinander die Elemente einer langen Reihe „einsammelt").
Wie leicht einzusehen ist, erfüllt diese Teilmenge die Bedingungen (i) und (ii) aus P3 und muß somit alle Elemente aus A enthalten, also auch $n_0$.
Das bedeutet aber, daß die Elemente der Menge quasi zyklisch angeordnet sein müssen, damit man beim „Einsammeln" der zu der Teilmenge gehörenden Elemente irgendwann bei $n_0$ ankommt.




Nun soll ja in dem Modell P2 nicht gelten, d.h. wir brauchen irgendwo zwei verschiedene Elemente mit demselben Nachfolger. Da dies bislang nicht gegeben ist, braucht unser Modell ein weiteres Element, z.B. wie folgt:




Auch dieses Element muß beim „Einsammeln" aber erreicht werden, damit P3 gilt. Dies ist aber nur möglich, wenn es Nachfolger irgendeines bereits vorhandenen Elementes ist. Diese haben aber bereits alle „ihren" Nachfolger und mehr als einen darf kein Element haben (Vor.).
Wie man es also dreht und wendet, es ist unmöglich sich ein Modell zu konstruieren, in dem nur P3 gilt.

**Ü3**:
Reiht man die ersten bekannten Primzahlen hintereinander auf, so sieht man schnell die Analogie zu dem Zahlenstrahl, der ja die einzige Möglichkeit war, natürliche Zahlen in der vereinbarten Form darzustellen.
Die erste Primzahl, die 2, ist in diesem Fall das erste Element, nimmt also hier die Rolle des ausgezeichneten Elementes ein. Außerdem folgt nach jeder Primzahl eindeutig eine weitere, d.h. jede Primzahl hat einen Nachfolger.

Damit erfüllt die Menge der Primzahlen die Voraussetzungen dafür, ein Modell natürliche Zahlen zu sein.
Nun zu den Axiomen:

P1 ist erfüllt, denn das ausgezeichnete Element hat keinen Vorgänger (2 ist die kleinste Primzahl).
P2 ist ebenfalls erfüllt, denn zwei verschiedene Primzahlen $p_1$ und $p_2$, von denen o.B.d.A. $p_1$ die kleinere sei, können nicht denselben Nachfolger haben, denn: $p_1 < p_2 < p_2'$
$p_2'$ kann also nicht die auf $p_1$ unmittelbar folgende Primzahl, also $p_1'$, sein.

Auch P3 ist erfüllt. Man stelle sich nämlich eine (beliebige) Teilmenge der Primzahlen vor, welche die erste Primzahl, die 2, sowie mit jeder Primzahl auch die nächste enthält (das sind die Bedingungen (i) und (ii)).
Diese Teilmenge muß alle Primzahlen enthalten, denn die Primzahlen sind (als Teilmenge der natürlichen Zahlen) durch die Relation „<" streng linear geordnet. Gerade diese Ordnung wurde verwendet, um den Nachfolger einer Primzahl zu bestimmen. Somit kann es keine Primzahl geben, die nicht in dieser Teilmenge enthalten ist. Demnach sind in jeder Teilmenge mit den Eigenschaften (i) und (ii) alle Primzahlen enthalten. Das heißt aber, daß P3 erfüllt ist.

Wir haben nun eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen, welche selbst ein Modell natürlicher Zahlen ist. Entsprechendes klappt mit allen anderen unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen, so z.B. mit der Menge der geraden Zahlen etc.
Diese scheinbar paradoxe Erscheinung läßt sich wie folgt erklären:
Auch wenn die Menge der Primzahlen ein Modell natürlicher Zahlen ist, gilt selbstverständlich nicht die Identität $\mathbb{N} = \mathbb{P}$. Wie in Kapitel 4.3 des großen GEPAD aber bereits festgehalten wurde, gibt es verschiedene Modelle der natürlichen Zahlen, die jedoch alle strukturgleich, 🕮 isomorph sind. Die Primzahlen bilden ein solches Modell.

**Ü4**:
Seien $a,b,c \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt mit

| | | |
|---|---|---|
| | $a < b \wedge b < c$ | |
| $\Rightarrow$ | $\exists\, x_1,x_2 \in \mathbb{N}: ( a + x_1 = b \wedge b + x_2 = c )$ | (Def. „<") |
| $\Rightarrow$ | $\exists\, x_1,x_2 \in \mathbb{N}: ( (a + x_1) + x_2 = c )$ | (Eigenschaft „=") |
| $\Rightarrow$ | $\exists\, x_1,x_2 \in \mathbb{N}: ( a + ( x_1 + x_2) = c )$ | (ASS „+") |
| $\Rightarrow$ | $a < c$ | (Def. „<", $x_1+x_2 \in \mathbb{N}$ wegen der Abgeschlossenheit der Addition in $\mathbb{N}$) |

t

**Ü5**:
Seien $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ beliebig mit

| | | |
|---|---|---|
| | $a < c \wedge b < d$ | |
| $\Rightarrow$ | $a+b < c+b \wedge b+c < d+c$ | (MON „<" bzgl. „+") |
| $\Rightarrow$ | $a+b < c+b \wedge c+b < c+d$ | (KOM „+") |
| $\Rightarrow$ | $a+b < c+d$ | (TRANS „<") |

t

Bem.: Diese Aussage erlaubt die Addition von Ungleichungen.

**Ü6**:
Beh.: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{N}: (\, a+c < b+c \;\Rightarrow\; a < b\,)$
Bew.:
Seien $a,b,c \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte $a+c < b+c$

Ann.: $a \not< b$
$\Rightarrow$ $a = b \;\dot{\vee}\; b < a$ (TRICH)
$\Rightarrow$ $a+c = b+c \;\dot{\vee}\; b+c < a+c$ (Eig. „=“, MON „<“ bzgl. „+“)
Dies ist wegen TRICH ein Widerspruch zur Voraussetzung $a+c < b+c$.

Damit ist die Ann. falsch, und es gilt $a < b$. t

**Ü7**:
Beh.: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{N}$ mit $c < a \wedge c < b : (\, a - c < b - c \;\Rightarrow\; a < b\,)$
Bew.:
Seien $a,b,c \in \mathbb{N}$ beliebig mit $c < a \wedge c < b$ und gelte $a - c < b - c$

$\Rightarrow$ $\exists x \in \mathbb{N}: (\, (a-c)+x = b-c\,)$ (Def. „<“)
$\Rightarrow$ $\exists x \in \mathbb{N}: (\, x+(a-c) = b-c\,)$ (KOM „+“)
$\Rightarrow$ $\exists x \in \mathbb{N}: (\, (x+a)-c = b-c\,)$ (Satz 4.4 (ii))
$\Rightarrow$ $\exists x \in \mathbb{N}: (\, c+(b-c) = x+a\,)$ (Def. „–“, vgl. Merkregel)
$\Rightarrow$ $\exists x \in \mathbb{N}: (\, b = x+a\,)$ (Satz 4.3 (ii), $c < b$)
$\Rightarrow$ $\exists x \in \mathbb{N}: (\, a+x = b\,)$ (KOM „+“, SYM „=“)
$\Rightarrow$ $a < b$ (Def. „<“)

t

**Ü8**:
Beh.: $\forall\, a,b \in \mathbb{N}: (\, a \cdot b \in \mathbb{N}\,)$
Bew.:
Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt, im folgenden fest.
Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ wie folgt definiert:
$M := \{\, b \in \mathbb{N} \;\text{ï}\; a \cdot b \in \mathbb{N}\,\}$

Es gilt: $a \cdot 1 = a$ (Def. Mult1)
a liegt in $\mathbb{N}$, (Vor)
also liegt auch $a \cdot 1$ in $\mathbb{N}$, d.h. $1 \in M$

M erfüllt damit Bedingung (i) aus **P3**.

Es gilt außerdem: $k \in M \;\Rightarrow\; k' \in M$ für alle Zahlen aus M, <u>denn</u>:

Sei k eine beliebige Zahl aus M, d.h. es gilt:
$a \cdot k$ liegt in $\mathbb{N}$ $\ast$

Betrachte $a \cdot k'$:
$a \cdot k' = a \cdot k + a$ ❖ (Def. Mult2)

$a \cdot k$ liegt in $\mathbb{N}$, ($\ast$)
ebenso a, (Vor)
also auch $a \cdot k + a$ (Abgeschlossenh. „+“ in $\mathbb{N}$)

und somit $a \cdot k'$ (❖)
$a \cdot k'$ ist also eine natürliche Zahl und damit liegt $k'$ in M (def. M).

M erfüllt also Bed. (ii) aus **P3**.

Insgesamt liegen also wegen **P3** alle natürlichen Zahlen in M, denn M erfüllt (i) und (ii). Das aber bedeutet nichts anderes, als daß die behauptete Aussage gilt. Die Zahl a war nämlich <u>beliebig</u> gewählt, so daß der Beweis von der Wahl von a unabhängig ist.

t

**Ü9**:

<u>1. DIST (ii)</u>

Beh.: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{N}: \big( (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \big)$

Bew.:

Seien $a,b \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt.

Sei $M := \{ c \in \mathbb{N}$ ï $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \}$

Dann gilt:

$1 \in M$, denn:

| | | |
|---|---|---|
| $(a+b) \cdot 1$ | $= a+b$ | (Def. Mult1) |
| | $= a \cdot 1 + b \cdot 1$ | (Def. Mult1) |

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt außerdem $k \in M \;\Rightarrow\; k' \in M$, <u>denn</u>:

Sei $k \in M$ beliebig, dann gilt:

$(a+b) \cdot k = a \cdot k + b \cdot k$ 👓

Betrachte nun $(a+b) \cdot k'$:

| | | |
|---|---|---|
| $(a+b) \cdot k'$ | $= (a+b) \cdot k + (a+b)$ | (Def. Mult2) |
| | $= (a \cdot k + b \cdot k) + (a+b)$ | (👓) |
| | $= (a \cdot k + a) + (b \cdot k + b)$ | (ASS „+“, KOM „+“) |
| | $= a \cdot k' + b \cdot k'$ | (Def. Mult2) |

$k'$ liegt also in M

Wegen P3 enthält M alle natürlichen Zahlen.
Da a und b beliebig gewählt waren, ist das Gesetz DIST(ii) bewiesen. t

<u>2. KOM „·“</u>

Beh.: $\forall\, a,b \in \mathbb{N}: (a \cdot b = b \cdot a)$

Bew.:

Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt.

Sei $M := \{ b \in \mathbb{N} \mid a \cdot b = b \cdot a \}$.

Dann gilt:

$1 \in M$, <u>denn</u>:

Hier folgt nun als Beweis dafür, daß $1 \in M$ gilt, eine eigene Vollständige Induktion. Zu zeigen ist folgende Aussage: $\forall\, a \in \mathbb{N}: (a \cdot 1 = 1 \cdot a)$. Beweist man diese Aussage zunächst als Hilfssatz, so kann die Aussage $1 \in M$ mit Verweis auf diesen Hilfssatz sofort als gültig abgehakt werden.

Sei $M^* := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1 = 1 \cdot n \}$

Dann gilt:
$1 \in M^*$, <u>denn</u>: $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$
Außerdem gilt für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$: $k \in M^* \Rightarrow k' \in M^*$, <u>denn</u>:
Sei $k \in M^*$, dann gilt $k \cdot 1 = 1 \cdot k$ ⌨
Betrachte $1 \cdot k'$:

| | | |
|---|---|---|
| $1 \cdot k'$ | $= 1 \cdot k + 1$ | (Def. Mult2) |
| | $= k \cdot 1 + 1$ | (⌨) |
| | $= k + 1$ | (Def. Mult1) |
| | $= k'$ | (Def. Add1) |
| | $= k' \cdot 1$ | (Def. Mult1) |

Insgesamt enthält also $M^*$ wegen P3 alle natürlichen Zahlen, insbesondere also die vorgegebene Zahl a, d.h. es gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ und somit gilt $1 \in M$.

Außerdem gilt für eine beliebige natürliche Zahl k: $k \in M \Rightarrow k' \in M$, <u>denn</u>:

Sei $k \in M$, d.h. es gilt $a \cdot k = k \cdot a$ ⌛
Betrachte $a \cdot k'$:

| | | |
|---|---|---|
| $a \cdot k'$ | $= a \cdot k + a$ | (Def. Mult2) |
| | $= k \cdot a + a$ | (⌛) |
| | $= k \cdot a + 1 \cdot a$ | ($a = a \cdot 1 = 1 \cdot a$, Def. Mult1, $1 \in M$) |
| | $= (k+1) \cdot a$ | (DIST (ii)) |
| | $= k' \cdot a$ | (Def. Add1) |

Wegen P3 enthält M also natürlichen Zahlen, so daß das Kommutativgesetz der Multiplikation bewiesen ist.

t

<u>3. DIST (i)</u>
Beh.: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{N}: \big(a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c\big)$
Bew.:
Seien a,b,c beliebige natürliche Zahlen.

| | | |
|---|---|---|
| $a \cdot (b+c)$ | $= (b+c) \cdot a$ | (KOM „$\cdot$“) |
| | $= b \cdot a + c \cdot a$ | (DIST (ii)) |
| | $= a \cdot b + a \cdot c$ | (KOM „$\cdot$“) |

t

Bem.: DIST (i) läßt sich natürlich ebenso wie DIST (ii) auch über Vollst. Induktion (nach a) zeigen.

<u>4. ASS „$\cdot$“</u>
Beh.: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{N}: \big(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\big)$
Bew.:
Seien $a,b \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.
Sei $M := \{ c \in \mathbb{N} \mid a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \}$.
Dann gilt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1 \in M$, <u>denn</u>: | $a \cdot (b \cdot 1)$ | $= a \cdot b$ | (Def. Mult1) |
| | | $= (a \cdot b) \cdot 1$ | (Def. Mult1, angewandt auf $a \cdot b$) |

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt außerdem: $k \in M \Rightarrow k' \in M$, <u>denn</u>:

Sei $k \in M$, d.h. es gilt $a \cdot (b \cdot k) = (a \cdot b) \cdot k$

Betrachte $a \cdot (b \cdot k')$:

$$\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot k') &= a \cdot (b \cdot k + b) && \text{(Def. Mult2)}\\
&= a \cdot (b \cdot k) + a \cdot b && \text{(DIST(i))}\\
&= (a \cdot b) \cdot k + (a \cdot b) \cdot 1 && \text{(, Def. Mult1)}\\
&= (a \cdot b) \cdot (k + 1) && \text{(DIST (i))}\\
&= (a \cdot b) \cdot k' && \text{(Def. Add1)}
\end{aligned}$$

Damit enthält M also nach P3 alle natürlichen Zahlen und die Behauptung ist, da a und b beliebig gewählt waren, bewiesen. t

**Ü10**:
Die Numerierung der folgenden Aufgaben entspricht derjenigen in Kap. 4.7.

**1.**

**a)** n viele nicht parallele Geraden, die jeweils paarweise verschiedene Schnittpunkte besitzen, haben insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$ viele Schnittpunkte.

Bew.:
Sei $S_n$ die Anzahl der Schnittpunkte bei n-vielen Geraden, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Dann ist zu zeigen:

$S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

**IA**: Bei einer Geraden gibt es keine Schnittpunkte, d.h. $S_1 = 0$. Somit gilt wegen $\frac{1(1-1)}{2} = 0$ die angegebene Formel für $n = 1$.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$

**IB**: $S_{k+1} = \frac{(k+1)\,((k+1)-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$

k viele Geraden, welche der Aufgabenstellung genügen, haben $\frac{k(k-1)}{2}$ viele Schnittpunkte. Kommt zu diesen Geraden eine weitere Gerade gemäß den vorgegebenen Bedingungen dazu, so bedeutet das für die Anzahl der Schnittpunkte: Die neue Gerade schneidet jede der schon vorhandenen Geraden in genau einem Punkt, d.h. auf dieser neuen Geraden liegen k viele Schnittpunkte. Keiner dieser Schnittpunkte war bereits in der alten Konstellation auch schon Schnittpunkt, denn dann würden ja drei Geraden durch einen Schnittpunkt verlaufen. Das bedeutet, daß mit der neuen Geraden zu den alten Schnittpunkten genau k viele neue Schnittpunkte dazukommen, also:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + k &&\\
&= \frac{k(k-1)}{2} + k && \textbf{(IV)}\\
&= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{2k}{2} && \text{(Erweitern)}\\
&= \frac{k(k-1) + 2k}{2} && \text{(Add. von Brüchen, Kap.1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{k((k-1)+2)}{2} \qquad \text{(DIST)}$$
$$= \frac{k(k+1)}{2}$$

Insgesamt gilt nach P3 die Behauptung also für alle $n \in \mathbb{N}$. t

**b)** Eine n-elementige Menge mit n-vielen Elementen hat genau $\frac{n(n-1)}{2}$ viele 2-elementige Teilmengen.

Bew.:
Sei $T_n$ die Anzahl aller 2-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Dann ist zu zeigen:

$$T_n = \frac{n(n-1)}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

**IA**: Eine 1-elementige Menge hat keine 2-elementige Teilmenge, deshalb gilt $T_1 = 0$. Wegen $\frac{1(1-1)}{2} = 0$ gilt die angegebene Formel für $n = 1$.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $T_k = \frac{k(k-1)}{2}$

**IB**: $T_{k+1} = \frac{(k+1)((k-1+1))}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$

Sei A eine beliebige Menge mit (k+1)-vielen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$.
$A \setminus \{a_{k+1}\}$ ist dann eine Menge mit k-vielen Elementen.
Die 2-elementigen Teilmengen von A lassen sich in zwei Gruppen einteilen, nämlich in diejenigen, in denen $a_{k+1}$ enthalten ist und diejenigen, in denen $a_{k+1}$ nicht enthalten ist.
Letztere sind genau die 2-elementigen Teilmengen von $A \setminus \{a_{k+1}\}$, und davon gibt es nach **IV** gerade $T_k$-viele.
Jede zwei-elementige Teilmenge, in der $a_{k+1}$ enthalten ist, besteht neben dem Element $a_{k+1}$ noch aus einem weiteren (von $a_{k+1}$ verschiedenen) Element. Für dieses zweite Element stehen alle Elemente aus
$A \setminus \{a_{k+1}\}$ zur Verfügung, dieses sind eben k-viele. Somit gibt es k-viele der gesuchten Teilmengen diesen Typs.
Insgesamt erhält man also für $T_{k+1}$:

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= T_k + k \\
&= \frac{k(k-1)}{2} + k && \textbf{(IV)} \\
&= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{2k}{2} \\
&= \frac{k(k-1)+2k}{2} \\
&= \frac{k((k-1)+2)}{2} && \text{(DIST)} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Insgesamt gilt nach P3 die Behauptung also für alle $n \in \mathbb{N}$. t

**c)** Bei dem Spiel „Der Turm von Hanoi“ benötigt man für das Umsetzen eines Turmes mit n vielen Scheiben bei optimaler Spielstrategie $2^n - 1$ viele Züge.

Bew.:
Sei $Z_n$ die Anzahl der bei optimaler Spielstrategie benötigten Züge bei einem Turm mit n-vielen Scheiben. Dann ist zu zeigen:
$Z_n = 2^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

**IA**: $2^1 - 1 = 1$ und es gilt, daß man (selbst bei wenig ausgefeilter Spielstrategie) nicht mehr als einen Zug braucht, um eine Scheibe auf eine andere Stange zu versetzen. Die Formel gilt also für $n=1$ .

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $Z_k = 2^k - 1$

**IB**: $Z_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

Will man den Scheibenstoß mit (k+1)-vielen Scheiben umsetzen, so muß man, um die größte der Scheiben überhaupt irgendwohin bewegen zu können, die anderen k-vielen Scheiben auf eine frei Stange versetzen, da die größte der Scheiben ausschließlich auf eine freie Stange plaziert werden kann (vgl. Spielregeln). Dazu benötigt man (mindestens) $Z_k$-viele Züge. Nun kann die größte Scheibe (mit einem Zug) auf die freie Stange bewegt werden (ein Zug), um schließlich den Scheibenstoß mit den restlichen k-vielen Scheiben (wiederum mit $Z_k$-vielen Zügen) auf diese Scheibe zu versetzen.
Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= Z_k + 1 + Z_k \\ &= 2\,Z_k + 1 \\ &= 2 \cdot (2^k - 1) + 1 && \textbf{(IV)} \\ &= 2 \cdot 2^k - 2 + 1 && \text{(DIST)} \\ &= 2^{k+1} - 1 && \text{(Potenzgesetz)} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt nach dem Induktionsprinzip die Behauptung also für alle $n \in \mathbb{N}$. t

**2.**

**a)** $1+2+3+ \ldots +n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bew.:

**IA**: Wegen $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ gilt die Formel für $n = 1$.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $1+2+3+ \ldots +k = \frac{k(k+1)}{2}$

**IB**: $1+2+3+ \ldots +(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$ (DIST)

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+(k+1) &= \big(1+2+3+\ldots+k\big)+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && (\textbf{IV}) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k^2+k)+(2k+2)}{2} && (\text{DIST}) \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2} && (\text{ASS „+“})
\end{aligned}$$

Damit gilt nach P3 also insgesamt die Behauptung für alle $n\in\mathbb{N}$.

t

**b)** $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Bew.:

**IA**: $1=1^2$ ist eine wahre Aussage, deshalb gilt die Formel für $n=1$.

**IS**: Sei $k\in\mathbb{N}$ mit $k\geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$

**IB**: $1+3+5+\ldots+\big(2(k+1)-1\big)=(k+1)^2$

$$\begin{aligned}
1+3+5+\ldots+\big(2(k+1)-1\big) &= 1+3+5+\ldots+(2k-1)+\big(2(k+1)-1\big) \\
&= k^2+\big(2k+1\big) && (\textbf{IV}) \\
&= (k+1)^2 && (\text{1. bin. Formel})
\end{aligned}$$

Nach dem Induktionsaxiom ist die Behauptung somit für alle $n\in\mathbb{N}$ bewiesen.

t

**c)** $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Bew.:

**IA**: $1\cdot 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ ist eine wahre Aussage, da gilt $2=2$.
Somit gilt die Formel für $n=1$.

**IS**: Sei $k\in\mathbb{N}$ mit $k\geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k\cdot(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

**IB**: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(k+1)\cdot(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (k+1)\cdot(k+2)$$

$$= \big(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + k\cdot(k+1)\big) + (k+1)\cdot(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)\cdot(k+2) \qquad (\mathbf{IV})$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

(DIST, Ausklammern von (k+1)(k+2))

Nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion ist somit die Behauptung für alle $n\in\mathbb{N}$ bewiesen.

t

**3.**

**a)** $5 \mid 6^n - 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Bew.:

**IA**: $6^1 - 1 = 5$ und $5 \mid 5$ (REFL „$\mid$"), d.h. die Aussage gilt für n=1

**IS**: Sei $k\in\mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $5 \mid 6^k - 1$

**IB**: $5 \mid 6^{k+1} - 1$

$$\begin{aligned} 6^{k+1} - 1 &= 6\cdot 6^k - 1 \\ &= (5\cdot 6^k + 6^k) - 1 \\ &= 5\cdot 6^k + (6^k - 1) \qquad \text{(Klammerregeln „–")} \end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach Def. „$\mid$" durch 5 teilbar, der zweite nach **IV**. Nach Satz 6.3 (ii) gilt deshalb:

$$5 \mid 5\cdot 6^k + (6^k - 1)$$

$$\Rightarrow\ 5 \mid 6^{k+1} - 1 \qquad (\ )$$

Die Behauptung ist also nach dem Induktionsaxiom für alle $n\in\mathbb{N}$ bewiesen.

t

**b)** $6 \mid n^3 - n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Bew.:

**IA**: Nach Satz 6.1(iii) gilt: $6 \mid 0$ . Wegen $1^3 - 1 = 0$ gilt die Aussage für n=1.

**IS**: Sei $k\in\mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $6 \mid k^3 - k$

**IB**: $6 \mid (k+1)^3 - (k+1)$

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3-(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)-(k+1) \\
&= (k^3-k)+(3k^2+3k+1-1) && (\text{ASS „+" in } \mathbb{Z}) \\
&= (k^3-k)+3\cdot(k^2+k) && (\text{DIST}) \\
&= (k^3-k)+3\cdot k(k+1) \quad ⊛ && (\text{DIST})
\end{aligned}
$$

Der Term $k(k+1)$ ist durch zwei teilbar, da eine von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets gerade ist.
(Strenggenommen müßte $2 \mid k(k+1)$ an dieser Stelle formal bewiesen werden.)
Es gilt also:

$$
\begin{aligned}
2 \mid k(k+1) &\Rightarrow \quad 3\cdot 2 \mid 3\cdot k(k+1) && (\text{Satz 6.3 (v)}) \\
&\Rightarrow \quad 6 \mid 3\cdot k(k+1) \quad 💾
\end{aligned}
$$

Der Term $k^3-k$ ist nach **IV** durch 6 teilbar, also folgt mit Satz 6.3 (ii) und 💾 :

$$
\begin{aligned}
& 6 \mid (k^3-k)+3\cdot k(k+1) \\
\Rightarrow\ & 6 \mid (k+1)^3-(k+1) && (⊛)
\end{aligned}
$$

Die Behauptung ist nach dem Induktionsaxiom also für alle $n\in\mathbb{N}$ bewiesen.

t

**c)** $9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Bew.:

**IA**: $1^3+2^3+3^3 = 1+8+27 = 36$ und $9 \mid 36$ gilt.

**IS**: Sei $k\in\mathbb{N}$ mit $k\geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $9 \mid k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$

**IB**: $9 \mid (k+1)^3+((k+1)+1)^3+((k+1)+2)^3 \Leftrightarrow 9 \mid (k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 &= (k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27 \\
&= \underbrace{k^3+(k+1)^3+(k+2)^3}_{\blacklozenge}+\underbrace{9(k^2+3k+3)}_{\blacklozenge\blacklozenge} && (\text{DIST, KOM})
\end{aligned}
$$

Term $\blacklozenge$ ist nach **IV** durch 9 teilbar, Term $\blacklozenge\blacklozenge$ aufgrund der Def. „$\mid$". Also ist nach Satz 6.3 (ii) auch deren Summe durch 9 teilbar, so daß **IB** gilt.

Nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion ist die Behauptung für alle $n\in\mathbb{N}$ bewiesen.

**d)** 3 teilt das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen.
(vgl. auch Kap. 6, Ü15)

Zuerst gilt es, drei aufeinanderfolgende Zahlen $n_1$, $n_2$, $n_3$ formal darzustellen. Nennt man die erste der drei Zahlen n, so ergibt sich für die nächsten beiden: $n_2 = n+1$, $n_3 = n+2$. Das Produkt dieser Zahlen lautet dann:
$n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = n^3+3n^2+2n$
Also lautet die Behauptung: $3 \mid n^3+3n^2+2n$

Nennt man jedoch die zweite der drei Zahlen n (n>1), so lassen sich die anderen beiden darstellen als $n_1 = n-1$, $n_3 = n+1$.
Für das Produkt heißt das:
$(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n^3 - n$
Die Aussage sieht dann formal so aus: $3 \mid n^3 - n$

Dies ist wesentlich einfacher zu beweisen als der erste Ansatz. Der Beweis mit VI verläuft im Prinzip analog zu Beispiel b).
Da b) bereits bewiesen ist, berufen wir uns im folgenden <u>direkten</u> Beweis auf die dort gezeigte Aussage $6 \mid n^3 - n$

Beh.: $3 \mid n^3 - n$
Bew.:

| | | |
|---|---|---|
| Es gilt | $3 \mid 6 \;\wedge\; 6 \mid n^3 - n$ | $(6 = 2 \cdot 3$, Ü9 3b)) |
| $\Rightarrow$ | $3 \mid n^3 - n$ | (Trans „$\mid$“) |

t

**4.**

**a)** Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2n+1 < n^2$?

Beh.: Für $n \geq 3$ gilt: $2n+1 < n^2$

Bew.:

**IA**: Für $n = 3$ ergibt sich mit $2 \cdot 3+1 < 3^2 \Leftrightarrow 7 < 9$ eine wahre Aussage.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit **k ³ 3** beliebig aber fest.

**IV**: $2k+1 < k^2$

**IB**: $2(k+1)+1 < (k+1)^2$

Es gilt:
$2(k+1)+1 = 2k+1 + 2$ sowie $(k+1)^2 = k^2 + 2k+1$

Nach **IV** gilt:

| | | |
|---|---|---|
| | $2k+1 < k^2$ | |
| $\Rightarrow$ | $(2k+1)+2 < k^2 + (2k+1)$ | $(2 < 2k+1$ gilt wg. $k \geq 3$, MON „<“ bzgl. „+“) |
| $\Rightarrow$ | $(2k+2)+1 < (k+1)^2$ | (ASS „+“, KOM „+“,1. bin. Formel) |
| $\Rightarrow$ | $2(k+1)+1 < (k+1)^2$ | (DIST) |

Strenggenommen müßte die Aussage $2 < 2k+1$ für $k \geq 3$ bewiesen werden, bevor man auf sie in obigem Beweis zurückgreifen darf. <u>Eine</u> Möglichkeit:

| | | |
|---|---|---|
| Es gilt: | $1 < k$ | $(k \geq 3)$ |
| $\Rightarrow$ | $2 < 2k$ | (MON „<“ bzgl. „$\cdot$“) |
| $\Rightarrow$ | $2 < 2k+1$ | |

Damit gilt nach dem Induktionsprinzip insgesamt die Behauptung für alle $n \geq 3$.

t

**b)** Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 < 2^n$ ?

Diese Aufgabe ist im großen GEPAD bereits ausführlich behandelt worden. Es empfiehlt sich dringend, dort nachzulesen, wie man bei einem solchen Aufgabentyp auf die Lösung kommen kann, insbesondere bevor man die nächste Lösung durchliest, bei der man ansonsten verzweifelt fragt, „wie man drauf kommt".
Dem/der Leser(in) bleibt hier selbst überlassen, den Beweis zu b) in der endgültigen Kurzform zu notieren. Wer dabei Schwierigkeiten hat, kann sich an der Lösung der folgenden Aufgabe orientieren.

**c)** Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $5n^2 < 2^n + 4$?

Beh.: Für $n = 1$ und für alle $n \geq 9$ gilt: $5n^2 < 2^n + 4$

Bew.: Für $n = 1$ ergibt sich $5 \cdot 1^2 < 2^1 + 4$ , da $5 < 6$

Für $1 < n < 9$ rechne der/die Leser(in) selbst nach, daß die Ungleichung nicht stimmt.

**IA**: Für $n = 9$ ergibt sich die wahre Aussage $5 \cdot 9^2 < 2^9 + 4 \iff 405 < 516$

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit **k** ³ **9** beliebig aber fest.

**IV**: $5k^2 < 2^k + 4$

**IB**: $5(k+1)^2 < 2^{k+1} + 4$

Es gilt wegen der binomischen Formel und den Potenzgesetzen:
$5(k+1)^2 = \underline{5k^2} + \mathbf{10k + 5}$ sowie $2^{k+1} + 4 = 2 \cdot 2^k + 4 = \underline{2^k + 4} + \mathbf{2^k}$ ♦

Wegen IV gilt bereits: $\underline{5k^2} < \underline{2^k + 4}$

Außerdem gilt: $\mathbf{10k+5} < \mathbf{2^k}$ ✂

Diese Aussage läßt sich aus $k \geq 9$ schließen, allerdings ist dies nicht ganz einfach. Wir ziehen hier den längeren, aber unseres Erachtens einfacheren Weg vor, diese Aussage über eine weitere Vollständige Induktion zu beweisen. Der/die Leser(in) lasse sich davon nicht abschrecken - diese <u>zweite</u> Induktion innerhalb eines Induktionsbeweises ist immer einfacher:

**IA**: Für $k = 9$ ergibt sich die wahre Aussage $10 \cdot 9 + 5 < 2^9 \iff 95 < 512$

(Man beachte: Da die zu zeigende Aussage lediglich einen Hilfssatz für die Behauptung der Aufgabenstellung darstellt, genügt es uns völlig, wenn sie auch erst ab $k \geq 9$ gilt.)

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit **k** ³ **9** beliebig aber fest.

**IV**: $10k + 5 < 2^k$

**IB**: $10(k+1) + 5 < 2^{k+1}$

| | | |
|---|---|---|
| | $10k + 5 < 2^k$ | (**IV**) |
| $\Rightarrow$ | $(10k + 5) + 10 < 2^k + 2^k$ | (MON „<" bzgl. „+", $10 < 2^k$ gilt für $k \geq 9$) |
| $\Rightarrow$ | $(10k + 10) + 5 < 2^k + 2^k$ | (ASS „+", KOM „+") |
| $\Rightarrow$ | $10(k + 1) + 5 < 2 \cdot 2^k$ | (DIST) |

$$\Rightarrow \qquad 10(k+1)+5 \; < 2^{k+1} \qquad \text{(Potenzgesetz)}$$

Damit gilt **10k+5** < **2**$^{\mathbf{k}}$ ✂ für alle $n \in \mathbb{N}$ .

Also kann man mit Hilfe von Ü5 (Addition von Ungleichungen) wie folgt schließen:

$$5k^2 < 2^k + 4 \quad \wedge \quad 10k+5 < 2^k \qquad (\textbf{IV} \text{ und ✂})$$

$$\Rightarrow \; 5k^2 + (10k+5) \; < \; (2^k+4) + 2^k \qquad \text{(Add. v. Ungleich.)}$$

$$\Rightarrow \qquad 5(k+1)^2 \; < \; 2^{k+1} + 4 \qquad (\blacklozenge)$$

Insgesamt ist nach dem Induktionsaxiom damit die Beh. bewiesen.

t

**Ü11**:

Bew.:

**IA**: $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \;\Leftrightarrow\; 1 = 1$

Letzteres ist eine wahre Aussage, somit ist wegen „$\Leftrightarrow$“ die Aussage für n=1 wahr.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $1^2+2^2+3^2+ \ldots +k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

**IB**: $1^2+2^2+3^2+ \ldots +(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+ \ldots +(k+1)^2 &= 1^2+2^2+3^2+ \ldots +k^2+(k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && (\textbf{IV}) \\
❄ \qquad &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} && \text{(DIST, Auskl. v. (k+1))} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+(3-2)) + 6k+6]}{6} && (1 = 3-2\text{, DIST}) \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+3)-2k + 6k+6]}{6} && \text{(DIST)} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+3) + 4k+6]}{6} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+3) + 2(2k+3)]}{6} && \text{(DIST, Auskl. v. 2))} \\
💧 \qquad &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} && \text{(DIST, Auskl. v. 2k+3))}
\end{aligned}$$

Es ist auch möglich, erst die Terme ❄ und 💧 explizit zu berechnen, um so ihre Gleichheit zu zeigen, dies ist zwar z.T. etwas mühselig, vermeidet aber das ungeliebte Ausklammern:

❄: $\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{k(2k^2+3k+1)+6(k^2+2k+1)}{6} = \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$

💧: $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6} = \frac{2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$

Insgesamt ist damit nach dem Induktionsaxiom die Behauptung bewiesen.

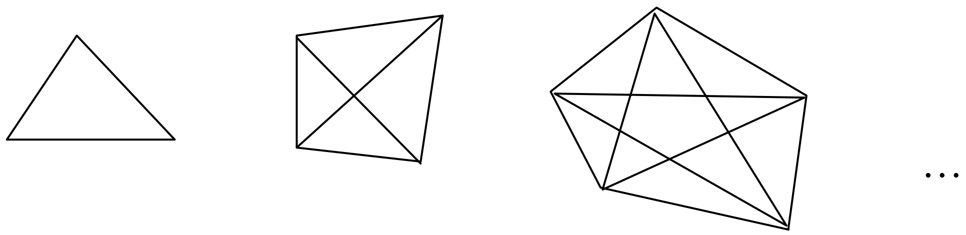
t

**Ü12**:

Wegen $2^{3n} - 1 = 8^n - 1$ ist der Beweis dieser Aussage exakt so zu führen, wie der Beweis von Ü9, 3a), natürlich mit anderen Zahlenwerten. Auf eine Wiedergabe kann hier deshalb verzichtet werden.

**Ü13**:

Da es kein Ein-Eck und kein Zwei-Eck gibt, beginnen wir unsere Betrachtungen mit $n = 3$. Zunächst sei jedoch für die Anzahl der Verbindungslinien zwischen den Eckpunkten eines konvexen n-Ecks die Bezeichnung $V_n$ eingeführt.



$n = 3$     $n = 4$     $n = 5$

$V_3 = 3$     $V_4 = 6$     $V_5 = 10$

Der geübte Punktmuster-Fan erkennt sofort die Folge der 🕮 Dreieckszahlen $D_n$, allerdings nicht mit dem gewohnten Beginn.

Deshalb ist die voreilige Vermutung, es gelte wie bei den Dreieckszahlen die Formel $V_n = D_n = \frac{n(n+1)}{2}$, falsch.

Eine Gegenüberstellung der Zahlen $D_n$ und $V_n$ hilft hier weiter:

$D_1 = 1$
$D_2 = 3$
$D_3 = 6$    $V_3 = 3$
$D_4 = 10$    $V_4 = 6$
$D_5 = 15$    $V_5 = 10$
$D_6 = 21$    $V_6 = ?$

Es gelten z.B. folgende Identitäten:

$V_3 = D_2 = 3$
$V_4 = D_3 = 6$
$V_5 = D_4 = 10$

Es liegt deshalb die Vermutung nahe, daß auch für alle weiteren $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$V_n = D_{n-1}$

für letzteres gilt bekanntlich $D_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$

<u>Beachte</u>: Die obigen Ausführungen reichen als Beweis nicht aus, es wurde lediglich aufgrund einiger Beispiele eine Vermutung aufgestellt, die es nunmehr mit Hilfe <u>inhaltlicher</u> Überlegungen zu beweisen gilt.

Beh.: Für alle $n \geq 3$ gilt $V_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Bew.:

**IA**: Gemäß der obigen Zeichnung gilt für $n = 3$: $V_3 = 3$.
Wegen $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ gilt die Behauptung für $n = 3$.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$ beliebig aber fest.

**IV**: $V_k = \frac{k(k-1)}{2}$

**IB**: $V_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2}$

Man stelle sich ein konvexes k+1-Eck vor. Über die Anzahl der Verbindungslinien in einem solchen Vieleck wissen wir nichts, wohl aber über die entsprechende Anzahl in einem k-Eck. Deshalb sind wir so dreist, vorübergehend dem k+1-Eck eine Ecke wegzunehmen und damit alle Verbindungslinien, die diese Ecke mit den anderen Ecken verbinden. Es bleibt ein k-Eck, in dem es laut **IV** $\frac{k(k-1)}{2}$ viele Verbindungslinien gibt.

Durch den vorübergehenden Eingriff sind genau k-viele Verbindungslinien entfernt worden, nämlich jeweils eine Verbindungslinie zu dem weggenommenen Eckpunkt für <u>jeden</u> verbliebenen Eckpunkt (und dies sind eben k-viele).
Damit muß für $V_{k+1}$ gelten:

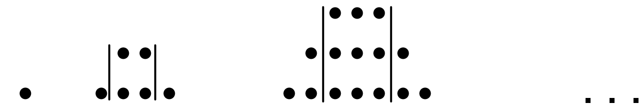
$$
\begin{aligned}
V_{k+1} &= V_k + k \\
&= \frac{k(k-1)}{2} + k && \textbf{(IV)} \\
&= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{2k}{2} \\
&= \frac{k(k-1) + 2k}{2} \\
&= \frac{k\big((k-1) + 2\big)}{2} && \text{(DIST)} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Insgesamt gilt nach dem Induktionsprinzip die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

t

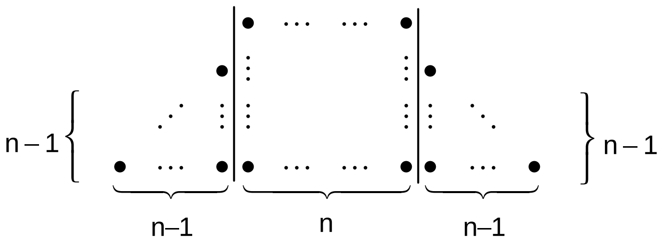
**Ü14**:

a)



$S_1$ $S_2$ $S_3$

Offensichtlich kann man jede Figur so in drei Teile einteilen, daß sich in der Mitte ein Quadrat der Seitenlänge n, links und rechts jeweils ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge n–1 findet (dies gilt auch für die erste Figur).
In der n-ten Figur ($S_n$) sähe diese Darstellung wie folgt aus:




$D_{n-1}$ ist die (n–1)-te Dreieckszahl, d.h. $D_{n-1}$ gibt die Anzahl der Punkte in einem gleichseitigen Dreieck an, dessen Seitenlänge n–1 ist.

Die Formel zur Berechnung der 🕮 Dreieckszahlen ist bekannt: $D_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Entsprechend ergibt sich (durch Einsetzen von n–1 für n): $D_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$

Die Formel für die Quadratzahlen ist sehr naheliegend: $Q_n = n^2$,
d.h. in einem quadratischen Punktmuster mit der Seitenlänge n liegen $n^2$-viele Punkte.

Für die Gesamtpunktzahl in der n-ten Figur $S_n$ ergibt sich also:

$$S_n = Q_n + 2 \cdot D_{n-1} = n^2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + n(n-1) = n^2 + n^2 - n = 2n^2 - n$$

b)

Beh.: $S_n = 2n^2 - n$

Bew.:

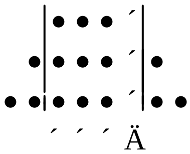
**IA**: Nach Vorgabe ist $S_1 = 1$, und wegen $2-1 = 1$ gilt die Formel für $n = 1$.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

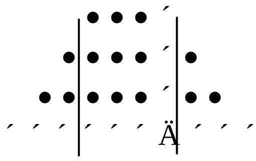
**IV**: $S_k = 2k^2 - k$

**IB**: $S_{k+1} = 2(k+1)^2 - (k+1)$

Die (k+1)-te Figur entsteht wie folgt aus der k-ten (für $k = 3$ werden zur Veranschaulichung die Ausführungen am Punktmuster illustriert):
Das mittlere Quadrat mit der „Seitenlänge“ k wird durch Hinzufügen von (2k+1)-vielen Punkten, die als „Winkel“ angelegt werden, zu einem Quadrat mit (k+1)-vielen Punkten pro Reihe:



Dann wird an die Unterseite jeden Dreiecks eine Reihe mit k-vielen Punkten angefügt



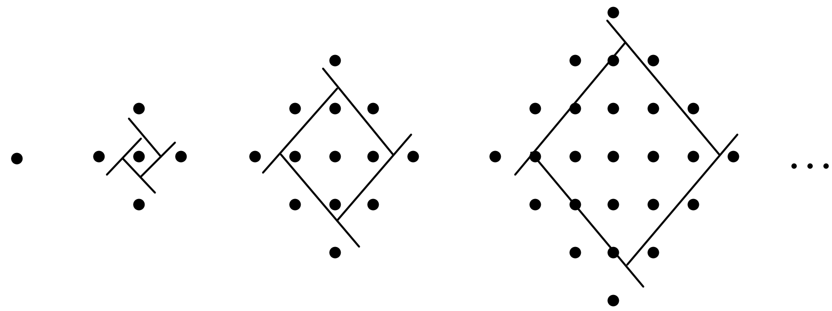
Insgesamt läßt sich die Anzahl der Punkte der (k+1)-ten Figur also wie folgt bestimmen:

| | | |
|---|---|---|
| $S_{k+1}$ | $= S_k + (2k+1) + k + k$ | (Begr. oben) |
| | $= S_k + 4k+1$ | |
| | $= (2\,k^2 - k) + 4k+1$ | (**IV**) |
| | $= 2\,k^2 + 3k + 1$ | |
| | $= 2\,k^2 + 4k+2 - (k+1)$ | |
| | $= 2(k^2 + 2k+1) - (k+1)$ | (DIST) |
| | $= 2(k+1)^2 - (k+1)$ | (1. bin. Formel) |

Mit dem Prinzip der Vollst. Induktion ist die Behauptung bewiesen.

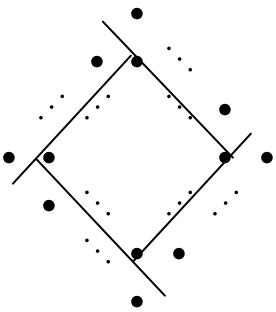
t

**Ü15**:
a)



R(1) R(2) R(3) R(4)

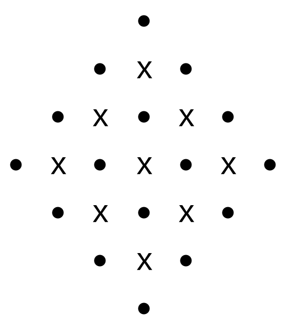
Das (n+1)-te Punktmuster R(n+1) entsteht aus dem n-ten Punktmuster wie folgt:



Die n-te Figur wird an jeder ihrer vier Seiten um genau so viele Punkte ergänzt, wie die Figur Punkte an ihren Kanten hat, also n viele.

Das heißt also: $R(n+1) = R(n) + 4n$

b)
An dem Beispiel $n = 4$ wird nun gezeigt, wie die folgende Formel für $R(n)$ in dem Punktmuster wiederentdeckt werden kann. Einige Punkte des Musters sind dabei zur Verdeutlichung durch Kreuze dargestellt:

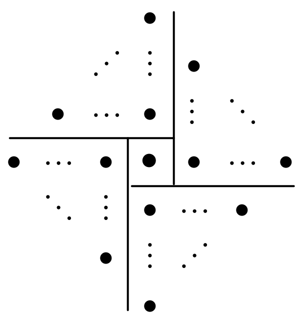


Konzentriert man sich nur auf die Punkte, so sieht man ein auf der Spitze stehendes Vierer-Quadrat, richtet man seinen Blick jedoch auf die Kreuze, so sieht man ein Dreier-Quadrat. Damit ergibt sich die allgemeine Vermutung:
$R(n) = n^2 + (n-1)^2$
Der Beweis dieser Formel war hier nicht gefragt, läßt sich aber mit Vollständiger Induktion unter Verwendung des in a) gefundenen Zusammenhanges leicht erledigen.

c)
Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $R(n)$ läßt bei Division durch 4 den Rest 1.

Bew.:

Der Beweis dieser Aussage kann selbstverständlich formal geführt werden. An dieser Stelle wird ein Punktmusterbeweis geführt, mit dem recht kurz die Gültigkeit der Aussage gezeigt werden kann. Einzige Schwierigkeit ist der Entwurf des allgemeinen Punktmusters.



Wie leicht zu erkennen ist, läßt sich die Punktkonfiguration $R(n)$ so in einzelne Felder einteilen, daß vier Dreiecke mit der gleichen Seitenlänge $(n-1)$ entstehen und ein Punkt in der Mitte übrigbleibt (dies bedeutet, daß der Viererrest 1 ist).

Die Anzahl der Punkte in jedem Dreieck entspricht der $(n-1)$-ten 🕮 Dreieckszahl $D_{n-1}$ .

Daraus ergibt sich, daß folgende Gleichung gilt:

$R(n) = 4 \cdot D_{n-1} + 1$

Nach 🕮 Division mit Rest bedeutet dies aber nichts anderes, als daß $R(n)$ den Viererrest 1 hat ($D_{n-1}$ ist eine natürliche Zahl!).

Nebenbei erhalten wir überdies folgende Gleichung:

$$(R(n) =)\ n^2 + (n-1)^2 = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

Bem.: Dieses Punktmuster läßt so viele verschiedene Sichtweisen zu wie kaum ein anderes, so daß neben den angedeuteten Lösungen noch eine Vielzahl weiterer (ebenso richtiger) existieren.

**Ü16**:
Wenn a eine gerade Zahl ist, so kann man sie in zwei gleich große Teile zerlegen. Dies läßt sich mit Hilfe von Punkten wie folgt darstellen:

$$\underbrace{\bullet \;\cdots\; \bullet \mid \bullet \;\cdots\; \bullet}_{a}$$

$a^2$ läßt sich bekanntlich als quadratisches Punktmuster mit a vielen Reihen mit jeweils a vielen Punkten darstellen:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{ccc|ccc}
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\hline
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}\right\}}_{a} a$$

Es zeigt sich, daß sich dieses quadratische Punktmuster tatsächlich vollständig in <u>vier</u> gleiche Teile (mit jeweils $\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right)$-vielen Punkten) einteilen läßt.
Die Anzahl der Punkte in dem quadratischen Punktmuster ist somit durch 4 teilbar, d.h. die Behauptung ist wahr.

t