Lösungen der Übungsaufgaben zu **Kapitel 3**

Ü1:

a) $\{1,2\} \subseteq B$ ist falsch, denn $1 \in \{1,2\}$, aber $1 \notin B$.

b) $\{1\} \subseteq A$ ist wahr, da $1 \in A$.

c) $\{3,4\} \subseteq A$ ist wahr, da $3 \in A$ und $4 \in A$.

d) $\{1,4\} \subseteq B$ ist falsch, denn $1 \in \{1,2\}$, aber $1 \notin B$.

e) $3 \in A$ ist wahr.

f) $\{\{3,4\}\} \subseteq B$ ist wahr, denn $\{3,4\} \in B$.

g) $\{1,2,3\} \in A$ ist falsch, da A keine Mengen als Elemente enthält.
Es gilt lediglich $1 \in A$, $2 \in A$ und $3 \in A$ und damit $\{1,2,3\} \subseteq A$.

Ü2:

a) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

b) $B \cap C = \{6, 12\}$

c) $A \setminus D = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Um die folgenden Mengen zu ermitteln, wird jeweils schrittweise vorgegangen:

d) $A \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$
$(A \setminus C) \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$((A \setminus C) \setminus B) \setminus D = \{1, 7, 9, 11\}$

e) $A \cup D = \{\{1, 2\}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 24, 30, 36, ...\} = \{x \mid x \in B \vee 6 \mid x\}$
⇧
Hier liegen alle weiteren natürlichen Zahlen, die durch 2 <u>und</u> 3, also durch 6 teilbar sind.

$(A \cup D) \setminus (B \cup C) = \{\{1, 2\}, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

f) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$C \setminus D = C$, da D <u>kein</u> Element aus C enthält.

$(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \setminus B) \cup C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$
$= \{x \mid (1 \leq x \leq 11 \wedge 2 \mid (x+1)) \vee 6 \mid x\}$

g) $D \setminus A = \{\{1, 2\}\}$
$(D \setminus A) \cup B = \{\{1, 2\}, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
$D \cap A = \{3, 4, 5\}$
$C \cap A = \{6, 12\}$
$((D \cap A) \cup (C \cap A)) = \{3, 4, 5, 6, 12\}$
$((D \setminus A) \cup B) \cap ((D \cap A) \cup (C \cap A)) = \{4, 6, 12\}$

Ü3:

Sei K die Menge der Kinder, die Kakaotüten gekauft haben, M die Menge der Kinder, die Milchtüten gekauft haben.
Gesucht ist die Anzahl der Kinder, die Milchtüten gekauft haben $|M|$.

Das 🕮 Additionsprinzip liefert folgende Gleichung.

$$|K \cup M| = |K| + |M| - |K \cap M|$$

$$\Rightarrow \quad |M| = |K \cup M| - |K| + |K \cap M|$$

Folgende Anzahlen sind in der Aufgabenstellung gegeben.

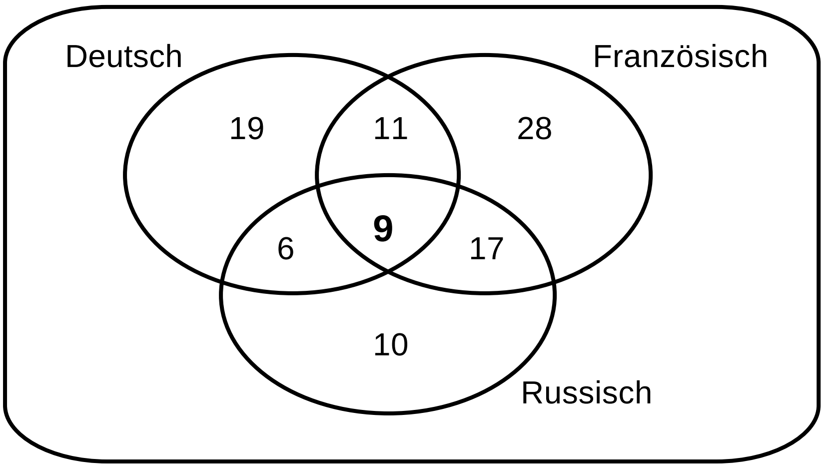
$|K| = 128$, $|K \cap M| = 37$ und $|K \cup M| = 236$

Werden diese Zahlen in die obige Gleichung eingesetzt, so läßt sich $|M|$ ermitteln.

$|M| = 236 - 128 + 37 = 145$

Ü4:

a) Um zum Ergebnis zu gelangen, ist es sinnvoll, mit der Schnittmenge der 3 Mengen ($D \cap F \cap R$) zu beginnen. Das heißt man setzt in das Venn-Diagramm in die Schnittmenge eine Zahl (hier 9) ein, die zunächst nur eine Vermutung ist und verändert die Anzahlen der übrigen Mengen entsprechend. Man arbeitet sich demnach von Innen nach Außen vor.
Am Ende werden die Anzahlen aller Mengen zusammengezählt. Ist das Ergebnis kleiner als 100 (die vorgegebene Anzahl aller sprachinteressierter Mathestudenten), so muß eine größere Zahl in die Schnittmenge gesetzt werden, ist das Ergebnis größer als 100, so verkleinert man die Anzahl der Schnittmenge. So nähert man sich mehr oder weniger langsam der richtigen Zahl.



b) Auch hier gilt das gleiche wie in Teil a). Man nimmt zunächst eine Anzahl für $D \cap F \cap R$ an und ermittelt davon ausgehend alle weiteren Anzahlen. Dabei kann man zur Veranschaulichung immer das Venn-Diagramm heranziehen. Auch in diesem Teil müssen alle ermittelten Anzahlen zum Schluß als Summe 100 ergeben, sonst ist die Ausgangszahl falsch.

½**DÇFÇR**½= **9**

Dann lassen sich mit dem Subtraktionsprinzip folgende Gleichungen aufstellen und lösen.

½**(FÇD)\ (DÇFÇR)**½= $|F \cap D| - |D \cap F \cap R| = 20 - 9 =$ **11**

½**(FÇR)\ (DÇFÇR)**½= $|F \cap R| - |D \cap F \cap R| = 26 - 9 =$ **17**

½**(DÇR)\ (DÇFÇR)**½= $|D \cap R| - |D \cap F \cap R| = 15 - 9 =$ **6**

Bei der Ermittlung der Anzahlen der restlichen Mengen ist das Subtraktions-, das Additionsprinzip, die Assoziativität und Kommutativität von „$\cap$“ hilfreich:

½**F\ ((FÇD)È(FÇR))**½= $|F| - |(F \cap D) \cup (F \cap R)| =$

$|F| - (|F \cap D| + |F \cap R) | - |D \cap F \cap R| = 65 - (20 + 26 - 9) =$ **28**

½**D\ ((FÇD)È(DÇR))**½= $|D| - |(F \cap D) \cup (D \cap R)| =$

$|D| - (|F \cap D| + |D \cap R) | - |D \cap F \cap R| = 45 - (20 + 15 - 9) =$ **19**

½**R\ ((DÇR)È(FÇR))**½= $|R| - |(D \cap R) \cup (F \cap R)| =$

$|R| - (|D \cap R| + |F \cap R) | - |D \cap F \cap R| = 42 - (15 + 26 - 9) =$ **10**

Ü5:

a) $\wp(A_1) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A_1\}$

b) $\wp(A_2) = \{ \emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{3\}\}, \{\{2\}, \{3\}\}, A_2\}$

b) $\wp(A_3) = \{ \emptyset, \{\{1,2\}\}, \{3\}, \{a\}, \{b\},$ ⇦ Ø und 1-elementige Teilmengen
$\{\{1,2\}, 3\}, \{\{1,2\}, a\}, \{\{1,2\}, b\},$ ⇦ 2-elementige Teilmengen
$\{3, a\}, \{3, b\}, \{a, b\},$
$\{\{1,2\}, 3, a\}, \{\{1,2\}, 3, b\},$ ⇦ 3-elementige Teilmengen und A_3
$\{\{1,2\}, a, b\}, \{3, a, b\}, A_3 \}$

Ü6:

A ist die Menge aller mit x bezeichneten Monate, die mehr als 30 Tage haben, also gilt:
A = {Januar, März, Mai, Juli, August, Oktober, Dezember}

B ist die Menge der Monatsnamen, die mit J beginnen, also gilt:
B = {Januar, Juni, Juli}

Damit gilt: $A \cap B$ = {Januar, Juli}

Hier ist schon zu sehen, daß die Behauptung aus der Aufgabenstellung falsch ist. Wird nämlich ein Element d aus $A \cap B$ gewählt, so muß es sich nicht zwangsläufig um den Juli handeln, es könnte auch der Januar sein.
Die Behauptung müßte (damit sie wahr ist) folgendermaßen lauten:

$d \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad d = \text{Januar} \vee d = \text{Juli}$,

da nur diese beiden Elemente in der Schnittmenge enthalten sind.

Ü7:

Bemerkung: Der Durchschnitt der Vielfachenmengen zweier Zahlen x und y ist wieder eine Vielfachenmenge, und zwar $V_{kgV(x,y)}$. So ist beispielsweise der Durchschnitt von V_2 und V_3 die Vielfachenmenge von 6 (V_6). Diese allgemeingültige Aussage läßt sich aus dem Satz kgV folgern und wird hier ohne Beweis benutzt.

Damit ergeben sich folgende Beziehungen:

kgV (2,4) = 4 $\Rightarrow V_2 \cap V_4 = V_4$
$\Rightarrow \mathbf{V_4 \subseteq V_2}$ (Satz 3.2 (iii))

kgV (2,6) = 6 $\Rightarrow V_2 \cap V_6 = V_6$
$\Rightarrow \mathbf{V_6 \subseteq V_2}$ (Satz 3.2 (iii))

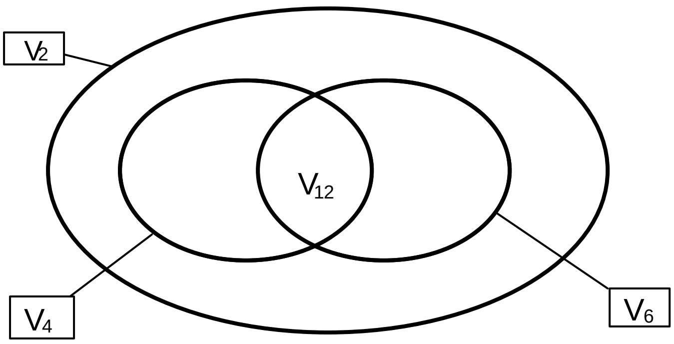
kgV (2,12) = 12 $\Rightarrow V_2 \cap V_{12} = V_{12}$
$\Rightarrow \mathbf{V_{12} \subseteq V_2}$ (Satz 3.2 (iii))

kgV (4,6) = 12 $\Rightarrow \mathbf{V_4 \cap V_6 = V_{12}}$

kgV (4,12) = 12 $\Rightarrow V_4 \cap V_{12} = V_{12}$
$\Rightarrow \mathbf{V_{12} \subseteq V_4}$ (Satz 3.2 (iii))

kgV (6,12) = 12 $\Rightarrow V_6 \cap V_{12} = V_{12}$
$\Rightarrow \mathbf{V_{12} \subseteq V_6}$ (Satz 3.2 (iii))

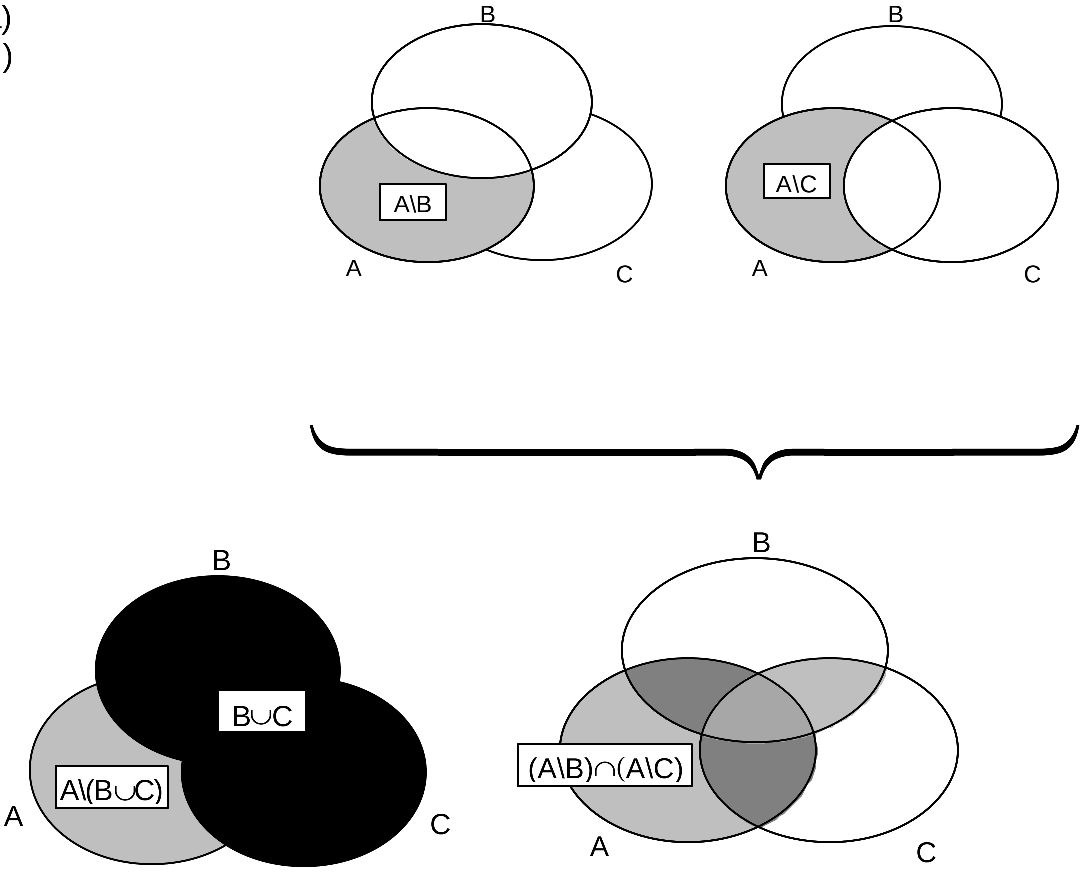
Das heißt: Die Mengen V_4, V_6 und V_{12} sind jeweils ganz in V_2 enthalten und V_{12} ist genau die Schnittmenge von V_4 und V_6.



Ü8:

a)

(i)



Man erkennt, daß sich die beiden grau eingefärbten Flächen entsprechen. Somit sind die repräsentierten Mengen gleich.

(ii) Sei $x \in A\backslash(B \cup C)$ beliebig gewählt.

	$x \in A\backslash(B \cup C)$	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \notin B \cup C$	(def. „\“)
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C)$	(def. „$\notin$“)
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$	(def. „$\cup$“)
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge \big(\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C)\big)$	(de Morgan)
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$	(def. „$\notin$“)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$	
$\Leftrightarrow$	$x \in A\backslash B \wedge x \in A\backslash C$	(def. „\“)
$\Leftrightarrow$	$x \in (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$	(def. „$\cap$“)

Da alle Umformungen äquivalent sind, gilt insbesondere:

$x \in A\backslash(B \cup C) \Rightarrow x \in (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$ und $x \in (A\backslash B) \cap (A\backslash C) \Rightarrow x \in A\backslash(B \cup C)$

und also mit der Definition von „$\subseteq$“ folgende Teilmengenbeziehungen:

$$A\backslash(B \cup C) \subseteq (A\backslash B) \cap (A\backslash C) \quad \wedge \quad (A\backslash B) \cap (A\backslash C) \subseteq A\backslash(B \cup C)$$

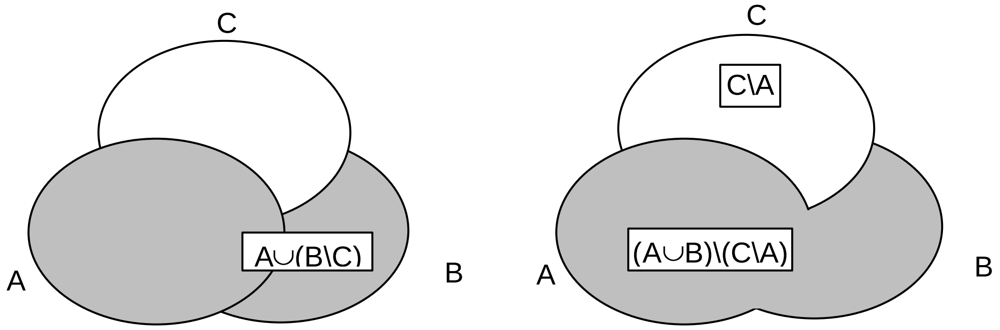
$\Rightarrow$ $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$ („$\subseteq$“ identitiv)? t

(iii)

A	B	C	B∪C	**A\(B∩C)**	A\B	A\C	**(A\B) ∪ (A\C)**
∈	∈	∈	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∈	∈	∈	∉	∉	∉	∉
∈	∉	∈	∈	∉	∈	∉	∉
∈	∈	∉	∈	∉	∉	∈	∉
∈	∉	∉	∉	∈	∈	∈	∈
∉	∈	∉	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∈	∈	∉	∉	∉	∉
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉

b)

(i)



Wenn man zuerst B\C zeichnet und dann A mit der entstandenen Menge vereinigt, so erhält man dieselbe Menge, als wenn zunächst A∪B gezeichnet wird und dann C\A von dieser Menge „weggenommen“ wird.

(ii) Sei $x \in A \cup (B \setminus C)$ beliebig gewählt.

	$x \in A \cup (B \setminus C)$	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \vee x \in B \setminus C$	(def. „∪“)
$\Leftrightarrow$	$x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C)$	(def. „\“)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin C)$	(DIST „∨“ bzgl. „∧“)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \cup B) \wedge \neg(x \notin A \wedge x \in C)$	(def. „∪“, de Morgan)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in C \wedge x \notin A)$	(KOM „∧“)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in C \setminus A)$	(def. „\“)
$\Leftrightarrow$	$x \in A \cup B \wedge x \notin C \setminus A$	(def. „∉“)
$\Leftrightarrow$	$x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$	(def. „\“)

Da die hier vorkommenden Umformungen sämtlich <u>äquivalent</u> sind, gelten nach der Definition von „⊆“ (s. a)) folgende Teilmengenbeziehungen:

$$A \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus (C \setminus A) \quad \wedge \quad (A \cup B) \setminus (C \setminus A) \subseteq A \cup (B \setminus C)$$

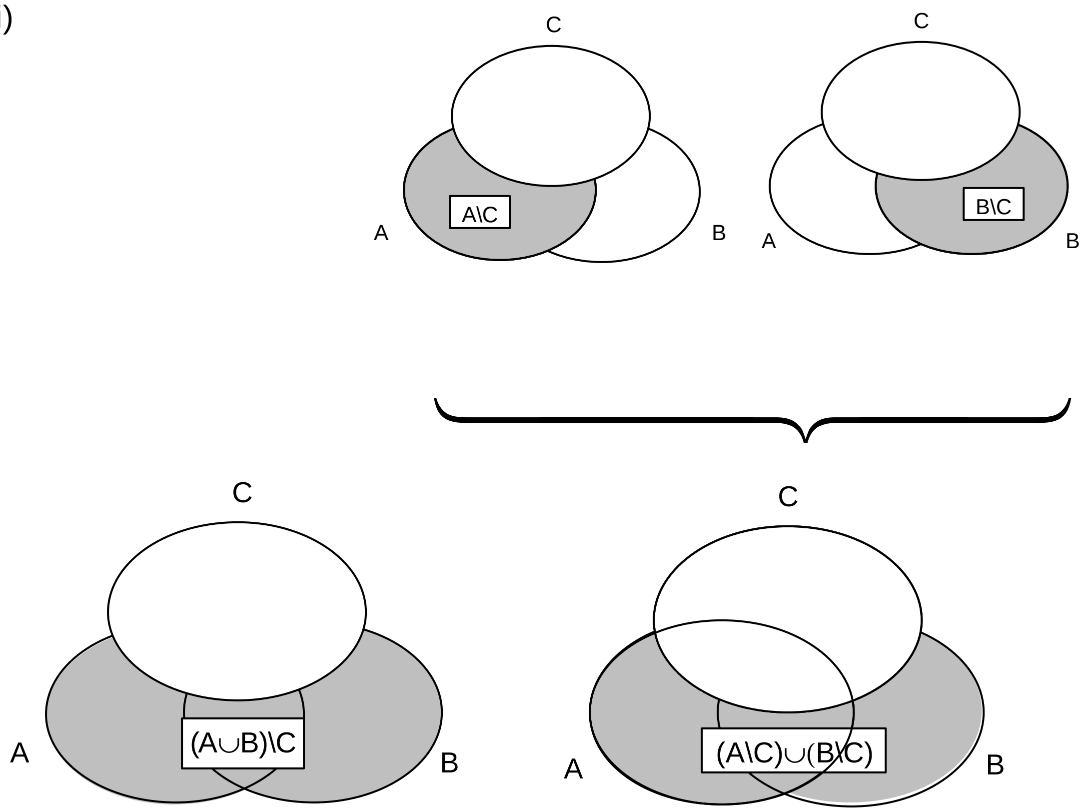
$\Rightarrow$ $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ („⊆“ identitiv)?

t ?

(iii)

A	B	C	B\C	**AÈ(B\C)**	A∪B	C\A	**(AÈB) \(C\A)**
∈	∈	∈	∉	Î	∈	∉	Î
∉	∈	∈	∉	Ï	∈	∈	Ï
∈	∉	∈	∉	Î	∈	∉	Î
∈	∈	∉	∈	Î	∈	∉	Î
∈	∉	∉	∉	Î	∈	∉	Î
∉	∈	∉	∈	Î	∈	∉	Î
∉	∉	∈	∉	Ï	∉	∈	Ï
∉	∉	∉	∉	Ï	∉	∉	Ï

c)
(i)



(ii) Sei $x \in (A \cup B) \setminus C$ beliebig gewählt.

	$x \in (A \cup B) \setminus C$	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \cup B \wedge x \notin C$	(def. „\“)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C$	(def. „∪“)
$\Leftrightarrow$	$x \notin C \wedge (x \in A \vee x \in B)$	(KOM „∧“)
$\Leftrightarrow$	$(x \notin C \wedge x \in A) \vee (x \notin C \wedge x \in B)$	(DIST „∧“ bzgl. „∨“)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$	(KOM „∧“)
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \setminus C) \vee (x \in B \setminus C)$	(def. „\“)
$\Leftrightarrow$	$x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	(def. „∪“)

Da die hier vorkommenden Umformungen sämtlich äquivalent sind, gelten nach der Definition von „⊆“folgende Teilmengenbeziehungen:

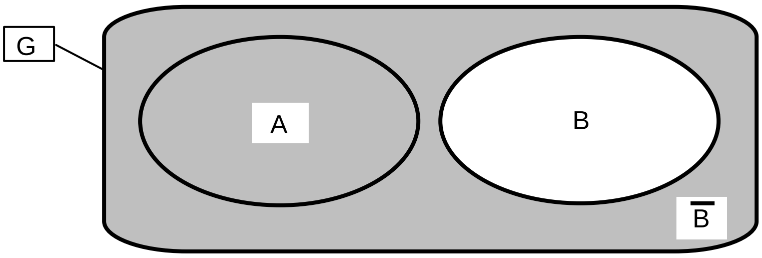
$$(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad \wedge \quad (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$$

$\Rightarrow$ $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ („⊆“ identitiv) ? t ?

(iii)

A	B	C	$A \cup B$	**(AÈB)\C**	$A \setminus C$	$B \setminus C$	**(A\C)È(B\C)**
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	Ï	$\notin$	$\notin$	Ï
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	Ï	$\notin$	$\notin$	Ï
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	Ï	$\notin$	$\notin$	Ï
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	Î	$\in$	$\in$	Î
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	Î	$\in$	$\notin$	Î
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	Î	$\notin$	$\in$	Î
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	Ï	$\notin$	$\notin$	Ï
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	Ï	$\notin$	$\notin$	Ï

d) (i)



Am Diagramm erkennt man, daß bei zwei disjunkten Mengen die eine <u>vollständig</u> in der Komplementärmenge der anderen liegt.

(ii) $A \cap B = \varnothing$

Wenn A und B disjunkte Mengen sind, so bedeutet dies, daß sie keine gemeinsamen Elemente haben. Also kann <u>kein</u> Element aus A gleichzeitig in B sein.

$\Rightarrow$ $\forall\, a \in A: (a \notin B)$ (A und B sind disjunkt)

Wenn a nicht in B liegt, so muß es in der Komplementärmenge von B liegen, da es sonst keine Möglichkeiten gibt.

$\Rightarrow$ $\forall\, a \in A: (a \in \overline{B})$

$\Rightarrow$ $A \subseteq \overline{B}$ (def. „$\subseteq$“) t ?

(iii) Da in dieser Aussage eine Folgerung vorkommt, wird hier - wie in der Logik - mit den Werten w und f gearbeitet.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$A \cap B = \varnothing$	$x \in \overline{B}$	$A \subseteq \overline{B}$	**AÇB=Ø Þ AÍ $\overline{B}$**
w	w	w	f	f	f	**w**
w	f	f	w	w	w	**w**
f	w	f	w	f	w	**w**
f	f	f	w	w	w	**w**

Ü9:

a) Beh.: $A \setminus B \subseteq B \setminus C$

Bew.: Sei $x \in A \setminus B$ beliebig gewählt.

Die Beweisidee ist hier folgende: Da A eine Teilmenge von B ist, bleibt von der Menge A nichts mehr übrig, wenn ganz B weggenommen wird, das heißt, A\B muß die leere Menge sein. Dann ist aber sofort klar, daß die gewünschte Teilmengenbeziehung gilt, da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist (vgl. Arbeitsaufgabe A2, S.64 im großen GEPAD). Zunächst wird nun also gezeigt, daß $A \setminus B = \varnothing$ gilt:

$$
\begin{array}{lll}
 & x \in A \setminus B & \\
\Rightarrow & x \in A \wedge x \notin B & \text{(def. „\textbackslash“)} \\
\Rightarrow & x \in B \wedge x \notin B & (A \subseteq B) \\
\Rightarrow & x \in B \setminus B & \text{(def. „\textbackslash“)} \\
\Rightarrow & x \in \emptyset & (B \setminus B = \emptyset)
\end{array}
$$

Insgesamt gilt nun (mit def. „⊆“): **A\B** Í **Ø** 🌲

Mit **A2** im Kapitel 3 gilt außerdem: **Ø** Í **A\B** ☃

Aus 🌲 und ☃ folgt $A \setminus B = \emptyset$ („⊆“ identitiv)

$\Rightarrow A \setminus B \subseteq B \setminus C$ (☃)? t ?

b) Beh.: $A \cap C \subseteq B \cap C$

Bew.: Sei $x \in A \cap C$ beliebig gewählt.

$$
\begin{array}{lll}
 & x \in A \cap C & \\
\Rightarrow & x \in A \wedge x \in C & \text{(def. „}\cap\text{“)} \\
\Rightarrow & x \in B \wedge x \in C & (A \subseteq B) \\
\Rightarrow & x \in B \cap C & \text{(def. „}\cap\text{“)}
\end{array}
$$

Insgesamt gilt nun (mit def. „⊆“): $A \cap C \subseteq B \cap C$?

t ?

c) Beh.: $A \cup C \subseteq B \cup C$

Bew.: Sei $x \in A \cup C$ beliebig gewählt.

$$
\begin{array}{lll}
 & x \in A \cup C & \\
\Rightarrow & x \in A \vee x \in C & \text{(def. „}\cup\text{“)} \\
\Rightarrow & x \in B \vee x \in C & (A \subseteq B) \\
\Rightarrow & x \in B \cup C & \text{(def. „}\cup\text{“)}
\end{array}
$$

Insgesamt gilt nun (mit def. „⊆“): $A \cup C \subseteq B \cup C$?

t ?

d) Beh.: $C \setminus B \subseteq C \setminus A$

Bew.: Sei $x \in C \setminus B$ beliebig gewählt.

$$
\begin{array}{lll}
 & x \in C \setminus B & \\
\Rightarrow & x \in C \wedge x \notin B & \text{(def. „\textbackslash“)}
\end{array}
$$

Wenn x nicht in B enthalten ist, dann kann dieses Element wegen $A \subseteq B$ erst recht nicht in A enthalten sein. Denn wäre $x \in a$, würde $x \in B$ folgen.

$$
\begin{array}{lll}
\Rightarrow & x \in C \wedge x \notin A & (A \subseteq B) \\
\Rightarrow & x \in C \setminus A & \text{(def. „\textbackslash“)}
\end{array}
$$

Insgesamt gilt nun (mit def. „⊆“): $C \setminus B \subseteq C \setminus A$

t ?

Daß in keiner der folgenden Aussagen die Gleichheit der Mengen ausgeschlossen werden darf, läßt sich an folgenden Beispielen klar machen:

zu a) Sei $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,2,3\}$

$\Rightarrow A \setminus B = \emptyset \wedge B \setminus C = \emptyset \;\Rightarrow\;$ **A\B** = **B\C**

zu b) Sei $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{a\}$

$\Rightarrow A \cap C = \{a\} \wedge B \cap C = \{a\} \;\Rightarrow\;$ **A**Ç**C** = **B**Ç**C** zu c) Sei $A = \{x\}$, $B = \{x,y\}$, $C = \{x,y,z\}$

$\Rightarrow A \cup C = \{x,y,z\} \wedge B \cup C = \{x,y,z\} \Rightarrow$ **AÈC = BÈC**

zu b) Sei $A = \{u,v\}$, $B = \{u,v,w\}$, $C = \{u\}$

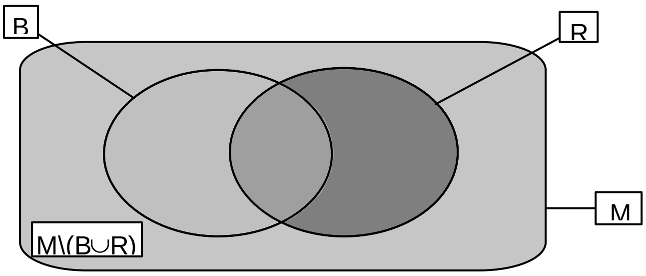
$\Rightarrow C \setminus B = \emptyset \wedge C \setminus A = \emptyset \Rightarrow$ **C\B = C\A**

Also <u>kann</u> in jedem Fall die Gleichheit gelten.

Ü10:

Sei M die Menge der Musikliebhaber, B die Menge der Liebhaber von Barockmusik und R die Menge der Liebhaber von Reggae. Gegeben sind: $|M| = 250$, $|B| = 93$, $|R| = 84$ und die Anzahl der Musikliebhaber, die weder zu B, noch zu R gehören, also $|M \setminus (B \cup R)| = 102$. $M \setminus (B \cup R)$ ist die Komplementärmenge von $B \cup R$ bezüglich M.

Im Venn-Diagramm läßt sich dies folgendermaßen veranschaulichen.



Gesucht ist nun die Anzahl der Menge $B \cap R$, also $|B \cap R|$.

Das Additionsprinzip liefert die Gleichung:

$$|B \cup R| = |B| + |R| - |B \cap R|$$

$$\Rightarrow \quad |B \cap R| = |B| + |R| - |B \cup R|$$

Um $|B \cap R|$ errechnen zu können, fehlt nun noch die Anzahl von $B \cup R$. Diese wird ermittelt, indem man von der Anzahl aller Musikliebhaber ($|M|$) die Anzahl derjenigen abzieht, die weder Barockmusik noch Reggae gerne hören ($|M \setminus (B \cup R)|$).

$$|M| - |M \setminus (B \cup R)| = 250 - 102 = 148 \quad \Rightarrow \quad |B \cup R| = 148$$

Einsetzen der vorhandenen Angaben in die obige Gleichung liefert die gewünschte Anzahl.

$$|B \cap R| = |B| + |R| - |B \cup R|$$

$$\Rightarrow \quad |B \cap R| = 93 + 84 - 148$$

$$\Rightarrow \quad |B \cap R| = 29$$

Also hören 29 Personen sowohl gerne Reggae als auch Barockmusik.

Ü11:

Sei $x \in A \cup (A \cap B)$ beliebig gewählt.

$x \in A \cup (A \cap B)$	
$\Rightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$	(def. „∪“)
$\Rightarrow x \in A \vee x \in A$	(3.2 (iii): $A \cap B \subseteq A$)
$\Rightarrow x \in A$	

Mit def. „⊆“ gilt somit: $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ ♌

Andererseits gilt mit Satz 3.1 (iii): $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ ♍

Aus ♌ und ♍ folgt $A \cup (A \cap B) = A$ („⊆“ identitiv)

t
?

Ü12:

a) Sei $x \in (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ beliebig gewählt.

$x \in (A \backslash B) \cup (A \cap B)$
$\Rightarrow$ $x \in A \backslash B \;\vee\; x \in A \cap B$ (def. „$\cup$“)

Überlegung:
Betrachtet werden nun die beiden Mengen $A \backslash B$ und $A \cap B$ in ihrer Beziehung zu der Menge A:
$A \cap B$ ist schon nach Satz 3.2 (iii) eine Teilmenge von A:
AÇB Í **A** ❍

$A \backslash B$ ist ebenfalls eine Teilmenge von A: Sei $x \in A \backslash B$ beliebig gewählt, dann ist x aus A und nicht aus B (nach der Definition von „\“). Also ist x auf jeden Fall aus A. Das bedeutet aber (nach der Def. „$\subseteq$“), daß gilt:
A\B Í **A** ■

$\Rightarrow$ $x \in A \;\vee\; x \in A$ (❍, ■)
$\Rightarrow$ $x \in A$

Insgesamt gilt nun (mit def. „$\subseteq$“): **(A\B)** È **(AÇB)** Í **A** ♒

Für die Gleichheit ist nun noch $A \subseteq (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ zu zeigen:

Sei $x \in A$ beliebig gewählt.

Überlegung:
Jedes Element aus A kann nur auf zwei Arten in Beziehung zur Menge B stehen. Entweder es ist ein Element aus B oder es ist kein Element aus B, also: $x \in B \vee x \notin B$.

$x \in A$
$\Rightarrow$ $x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B)$
$\Rightarrow$ $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$ (DIST „$\wedge$“ bzgl. „$\vee$“)
$\Rightarrow$ $x \in A \cap B \;\vee\; x \in A \backslash B$ (def. „$\cap$“, def. „\“)
$\Rightarrow$ $x \in (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ (def. „$\cup$“)
$\Rightarrow$ $x \in (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ (KOM „$\cup$“)

Insgesamt gilt nun (mit def. „$\subseteq$“): **A** Í **(A\B)** È **(AÇB)** 🗀

Aus ♒ und 🗀 folgt mit der Identitivität von „$\subseteq$“ : **(A\B)** È **(AÇB)** = **A**

? t

b) Auch dieser Beweis könnte wie Teil a) mit Bezug auf die Elemente bewiesen werden. Er verkürzt sich aber um einiges, wenn folgende Gleichung herangezogen wird:

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$

Dies ist deswegen praktisch, weil dann in der Aufgabe nur noch die Schnittmengenbeziehung vorkommt und man die Mengen wegen KOM und ASS von „$\cap$“ beliebig verschieben darf.
Daß diese Gleichung gilt, sei hier gezeigt:

Sei $x \in A \backslash B$ beliebig gewählt.

$x \in A \setminus B$
$\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B$ (def. „\“)
$\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in \overline{B}$ (def. Komplementärmenge)
$\Leftrightarrow \quad x \in A \cap \overline{B}$ (def. „$\cap$“)

Da die hier vorkommenden Umformungen alle <u>äquivalent</u> sind, gilt mit der Definition von „$\subseteq$“:
$A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$ <u>und</u> $A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B \Rightarrow A \setminus B = A \cap \overline{B}$ („$\subseteq$“ identitiv)

Nun zur Aufgabenstellung:

$(A \setminus B) \cap (A \cap B)$
$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B)$ ( )
$= (A \cap A) \cap (B \cap \overline{B})$ (KOM „$\cap$“, ASS „$\cap$“)
$= A \cap (B \setminus B)$ (3.2 (ii),)
$= A \cap \emptyset$ ($B \setminus B = \emptyset$)
$= \emptyset$ (3.2 (i))

? t

Ü13:

Bemerkung: Wie bei den meisten Aussagen über Mengengleichheit, werden auch diese über die Identitivität der Teilmengenbeziehung gezeigt. Da es sich bei den hier vorkommenden Umformungen aber <u>stets</u> um <u>Äquivalenzumformungen</u> handelt, können beide Beweisteile, die für den Beweis der Gleichheit von Mengen notwendig sind, auch hier auf einmal behandelt werden, so daß sich der Beweis um die Hälfte verkürzt.

(i) Sei $x \in A \cup B$ beliebig gewählt.

$x \in A \cup B$
$\Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B$ (def. „$\cup$“)
$\Leftrightarrow \quad x \in B \vee x \in A$ (KOM „$\vee$“)
$\Leftrightarrow \quad x \in B \cup A$ (def. „$\cup$“)

Mit der Identitivität von „$\subseteq$“ folgt: $A \cup B = B \cup A$

? t

(ii) Sei $x \in A \cap B$ beliebig gewählt.

$x \in A \cap B$
$\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B$ (def. „$\cap$“)
$\Leftrightarrow \quad x \in B \wedge x \in A$ (KOM „$\wedge$“)
$\Leftrightarrow \quad x \in B \cap A$ (def. „$\cap$“)

Mit der Identitivität von „$\subseteq$“ folgt: $A \cap B = B \cap A$

t ?

(iii) Sei $x \in A \cup (B \cup C)$ beliebig gewählt.

$x \in A \cup (B \cup C)$
$\Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in (B \cup C)$ (def. „$\cup$“)
$\Leftrightarrow \quad x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ (def. „$\cup$“)
$\Leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ (ASS „$\vee$“)
$\Leftrightarrow \quad x \in (A \cup B) \cup C$ (def. „$\cup$“)

Mit der Identitivität von „$\subseteq$“ folgt: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$? t

(iv) Sei $x \in A \cap (B \cap C)$ beliebig gewählt.

	$x \in A \cap (B \cap C)$	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \in (B \cap C)$	(def. „$\cap$")
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$	(def. „$\cap$")
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$	(ASS „$\wedge$")
$\Leftrightarrow$	$x \in (A \cap B) \cap C$	(def. „$\cap$")

Mit der Identitivität von „$\subseteq$" folgt: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$?

t ?

(v) Sei $x \in A \cap (B \cup C)$ beliebig gewählt.

	$x \in A \cap (B \cup C)$	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \in (B \cup C)$	(def. „$\cap$")
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$	(def. „$\cup$")
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$	(DIST „$\wedge$" bzgl. „$\vee$")
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$	(def. „$\cap$")
$\Leftrightarrow$	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(def. „$\cup$")

Mit der Identitivität von „$\subseteq$" folgt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

t ?

(vi) Sei $x \in A \cup (B \cap C)$ beliebig gewählt.

	$x \in A \cup (B \cap C)$	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \vee x \in (B \cap C)$	(def. „$\cup$")
$\Leftrightarrow$	$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$	(def. „$\cap$")
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$	(DIST „$\vee$" bzgl. „$\wedge$")
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$	(def. „$\cup$")
$\Leftrightarrow$	$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(def. „$\cap$")

Mit der Identitivität von „$\subseteq$" folgt: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

t ?

Ü14:

Die Vorgehensweise ist anlog zum Beweis von 3.5 (i). Da es sich hier außerdem wie in Ü13 <u>stets</u> um <u>Äquivalenzumformungen</u> handelt, können beide Beweisteile, die für den Beweis der Gleichheit von Mengen notwen dig sind, auch hier auf einmal behandelt werden, so daß sich der Beweis um die Hälfte verkürzt.

Sei $x \in \overline{A \cap B}$ beliebig gewählt.

$x \in \overline{A \cap B}$	$\Leftrightarrow$	$x \in G \setminus (A \cap B)$	(def. Komplementärmenge)
	$\Leftrightarrow$	$x \in G \wedge x \notin A \cap B$	(def. „\")
	$\Leftrightarrow$	$x \in G \wedge \neg(x \in A \cap B)$	(def. „$\notin$")
	$\Leftrightarrow$	$x \in G \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$	(def. „$\cap$")
	$\Leftrightarrow$	$x \in G \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))$	(de Morgan)
	$\Leftrightarrow$	$x \in G \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$	(def. „$\notin$")
	$\Leftrightarrow$	$(x \in G \wedge x \notin A) \vee (x \in G \wedge x \notin B)$	(DIST „$\wedge$" bzgl. „$\vee$")
	$\Leftrightarrow$	$(x \in G \setminus A) \vee (x \in G \setminus B)$	(def. „\")
	$\Leftrightarrow$	$(x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})$	(def. Komplementärmenge)
	$\Leftrightarrow$	$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$	(def. „$\cup$")

Also gilt: $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ <u>und</u> $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ (def. „$\subseteq$")

$\Rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ („$\subseteq$" identitiv) t