Lösungen der Übungsaufgaben zu **Kapitel 2**

Ü1:

Sätze sind im mathematischen Sinn genau dann Aussagen, wenn ihnen eindeutig ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

a) Während es sich hier um einen Aussagesatz handelt, ist es keine Aussage im mathematischen Sinne. Dem Satz kann nicht eindeutig ein Wahrheitswert zugeordnet werden, da die Beurteilung, ob die Aussage wahr oder falsch ist, subjektiv ist.
b) Dies ist keine Aussage.
c) Dies ist eine wahre Aussage.
d) Dies ist keine Aussage.
e) Dies ist eine falsche Aussage.
f) Dies ist eine wahre Aussage.
g) Dies ist keine Aussage.
h) Dies ist keine Aussage.
i) Dies ist eine wahre Aussage.
j) Dies ist eine falsche Aussage.
k) Dies ist eine falsche Aussage.

Ü2:

a) *Manche Studenten lernen Mengenlehre.*
Es gibt mindestens zwei Studenten, die Mengenlehre lernen.
Sei S die Menge aller Studenten und für einen Studenten $s \in S$ gelte M(s) genau dann, wenn er Mengenlehre lernt:
$\exists p,q \in S,\ p \neq q: \big(M(p) \wedge M(q)\big)$

b) *Deutsche Kinder müssen 9 Jahre die Schule besuchen.*
Alle deutschen Kinder müssen 9 Jahre die Schule besuchen.
Sei K die Menge aller deutschen Kinder und für ein Kind $k \in K$ gelte P(k) genau dann, wenn es 9 Jahre die Schule besuchen muß.
$\forall b \in K: (P(b))$

c) *Einige Menschen sind kinderlieb.*
Es gibt Menschen, die kinderlieb sind.
Sei M die Menge aller Menschen und für einen Menschen $m \in M$ gelte K(m) genau dann, wenn er kinderlieb ist:
$\exists i \in M: (K(i))$

d) *Vielfache von 25 sind auch durch 5 teilbar.*
Alle Vielfachen von 25 sind durch 5 teilbar.
Mit V(25) sei die Vielfachenmenge von 25 bezeichnet:
$\forall n \in V(25): (5 \mid n)$

e) *Niemand kennt ein wirksames Mittel gegen Krebs.*
Für alle Menschen gilt, daß sie kein wirksames Mittel gegen Krebs kennen.
Sei M die Menge aller Menschen und für einen Menschen $m \in M$ gelte Kr(m) genau dann, wenn er ein wirksames Mittel gegen Krebs kennt.
$\forall m \in M: (\neg Kr(m))$

Ü3:

Bemerkung: Hier geht es nur darum, die Aussagen in die formale Schreibweise zu übersetzen, unabhängig davon, ob sie wahr oder falsch sind.

a) *Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch drei teilbar.*

$\forall n \in \mathbb{N}: (3 \mid n(n+1))$

b) *Die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl.*

Sei $\mathbb{G}$ die Menge der geraden Zahlen und $\mathbb{U}$ die der ungeraden Zahlen.

$\forall n \in \mathbb{G}, a_i \in \mathbb{U}\ \exists b \in \mathbb{G}: (\sum_{i=1}^{n} a_i = b)$

ODER

$\forall n \in \mathbf{Z}, x_i \in \mathbf{Z}: (\ i \in \{1,2,3,..., 2 \cdot n\} \wedge 2 \mid x_i + 1 \ \Rightarrow\ 2 \mid (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{2 \cdot n}))$

c) *Jede ungerade Zahl, die größer als drei ist, läßt bei Division durch 4 den Rest 1 oder 3.*

$\forall q \in \mathbb{U}, q>3: (q \equiv 1(4) \vee q \equiv 3(4))$

ODER

$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 3}: (2n-1 \equiv 1(4) \vee 2n-1 \equiv 3(4))$

d) *Keine Primzahl ist durch 3 teilbar.*

Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen (vgl. Unterkap. 7.2)

$\forall p \in \mathbb{P}: (3 \nmid p)$

Ü4:

a) *Für Jeden gibt es irgendwo einen Platz.*

Es gibt jemanden, für den es nirgendwo einen Platz gibt.

b) *In allen Unis gibt es einen Professor, den alle verehren.*

Es gibt eine Uni, an der es keinen Professor gibt, den alle verehren.
Es gibt eine Uni, an der für jeden Professoren gilt: Es gibt einen Studenten, der ihn nicht verehrt.
Oder: Es gibt eine Uni, an der jeder Professor von (mindestens) einem Studenten nicht verehrt werden.

c) $\forall a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N}: (b<a)$

$\exists a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N}: (a \leq b)$

d) *Wenn du lieb bist, dann kommt der Nikolaus.*

Obwohl du lieb bist, kommt der Nikolaus nicht.

Ü5:

a)

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	f	f	f	w
f	w	w	w	w

b)

A	B	$A \dot\vee B$	$B \dot\vee A$	$A \dot\vee B \Leftrightarrow B \dot\vee A$
w	w	f	f	w
w	f	w	w	w
f	f	f	f	w
f	w	w	w	w

c)

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee B$	$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	f	w	w	f	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w	w

d)

A	B	C	$B \dot\vee C$	$A \dot\vee B$	$A \dot\vee (B \dot\vee C)$	$(A \dot\vee B) \dot\vee C$	$A \dot\vee (B \dot\vee C) \Leftrightarrow (A \dot\vee B) \dot\vee C$
w	w	w	f	f	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	w	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	f	w	w	f	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	w	w	w	w	w

e)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w
f	w	w	w	f	f	f	f	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w

f)

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

g)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	w	f	w
f	w	w	f	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w	w

h)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	f	w	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	f	w	w

Ü6:

a)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

b)

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (Satz 2.6 (i))

$\Leftrightarrow (q \vee \neg p)$ (KOM „$\vee$“)

$\Leftrightarrow (\neg(\neg q) \vee \neg p)$ (Gesetz v. der dopp. Negation)

$\Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Satz 2.6 (i))

c) Die Umkehrung von „$\Leftrightarrow$“ ist „$\Leftrightarrow$“. Also gilt die Umkehrung.
(Tolle Aufgabe, ne?)