# Lösungen der Übungsaufgaben zu **Kapitel 11**

**Ü1**:
Alle drei Aussagen sind wahr.

a)
Wir bezeichnen die drei aufeinanderfolgenden Zahlen mit n, n+1 und n+2 .
Wären (mindestens) zwei der drei Zahlen durch 3 teilbar, so müßte auch ihre Differenz durch 3 teilbar sein. Die Differenz zweier dieser drei Zahlen kann aber nur 1 oder 2 sein, das heißt, daß die Differenz nicht durch 3 teilbar ist.

Nun können drei Fälle eintreten:
1. n läßt bei Division durch 3 den Rest 0, d.h. n ist durch 3 teilbar. Dann gibt es aber eine durch 3 teilbare Zahl unter den drei vorgegebenen.
2. n läßt bei Division durch 3 den Rest 1. Dann ist n+2 durch drei teilbar, da der Rest 1, den n läßt, durch „+2“ quasi zu 3 aufgefüllt wird.
3. n läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Dann ist (analog zu 2.) n+1 durch 3 teilbar.

Insgesamt gibt es also unter den drei vorgegebenen Zahlen <u>immer genau</u> eine, die durch 3 teilbar ist.

<u>Bemerkung</u>:
Bei dieser Begründung, die bewußt ohne formale Mittel auskommt, wird die Gültigkeit gewisser intuitiver Annahmen unterstellt. Deshalb sprechen wir hier nicht von einem Beweis. Der/die Leser(in) sollte versuchen, diese Annahmen zu hinterfragen und mit Rückgriff auf seine Kenntnisse aus Kapitel 6 des großen GEPAD deren Gültigkeit zu klären.
Zu einer formaleren Vorgehensweise vgl. die Argumentationen in Kap.6, Ü15 und Kap. 4, Ü10, 3. d).

b)
Die obige Argumentation läßt sich analog auf diese Aufgabenstellung übertragen.

c)
Wenn a eine gerade Zahl ist, so kann man sie in zwei gleich große Teile zerlegen. Dies läßt sich mit Hilfe von Punkten wie folgt darstellen:

$$\underbrace{\bullet \;\cdots\; \bullet \;\big|\; \bullet \;\cdots\; \bullet}_{a}$$

$a^2$ läßt sich als quadratisches Punktmuster mit a-vielen Reihen mit jeweils a-vielen Punkten darstellen:

$$\left.\underbrace{\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}}_{a}\right\} a$$

Es zeigt sich, daß sich dieses quadratische Punktmuster ebenfalls in zwei gleiche Teile einteilen läßt. Die Behauptung ist somit wahr.

t

Bemerkung: Natürlich sind neben einer Punktmusterargumentation hier auch andere Beweismethoden möglich.

**Ü2**:

Bei (i) und (iii) handelt es sich um lückenlos und nachvollziehbar vorgetragene Argumentationsketten, also um korrekte Beweise. Daß nicht formal, sondern verbal formuliert wurde, ist lediglich eine stilistische Frage. Eine formale Argumentation ist für einen Beweis nicht zwingend notwendig.
(ii) ist lediglich eine aufgrund von Beispielen gewonnene Vermutung. Die Tatsache, daß alle gefundenen Beispiele der Behauptung nicht widersprechen, besagt nicht, daß es nicht doch eine weitere gerade Primzahl gibt.

Der Unterschied zwischen den Beweisen (i) und (iii) liegt darin, daß (i) indirekt, also mit einer der Behauptung widersprechenden Annahme, die zu einem Widerspruch führt, geführt wurde, (iii) hingegen direkt. Das in beiden Beweisen entscheidende Argument ist jeweils das gleiche (eine Primzahl hat genau zwei Teiler).

**Ü3**:

a)

Die folgenden Beispiele liefern eine Vermutung:

$$\begin{aligned} 121 &= 11^2 \\ 12321 &= 111^2 \\ 1234321 &= 1111^2 \\ 123454321 &= 11111^2 \end{aligned}$$

Vermutung:

$12345678987654321 = 111111111^2$

Mit Hilfe der schriftlichen Multiplikation läßt sich die Wahrheit dieser Aussage leicht nachweisen.

b)

Setzt man als bekannt voraus, daß die Summe zweier gerader (natürlicher) Zahlen sowie die Summe zweier ungerader (natürlicher) Zahlen jeweils gerade ist, so läßt sich durch Spezialisieren die Gültigkeit der beiden Aussagen folgern, denn die Quadratzahlen bilden eine Teilmenge der natürlichen Zahlen.

c)

Noch bevor irgendwelche Beispiele berechnet werden, drängt sich die Vermutung auf, daß das zweite Ergebnis größer sein wird (zumindest ging es uns so). Bei dem ersten gewählten Zahlenpaar ergibt sich aber das folgende Ergebnis:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1: \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{1+6}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4+3}{9} = \frac{7}{9}$$

Wie sieht's bei anderen Beispielen aus?

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1: \quad \left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{1+12}{16}=\frac{13}{16}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{9+4}{16}=\frac{13}{16}$$

Der/die Leser(in) wird wahrscheinlich ähnlich überraschende Ergebnisse erhalten haben. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß dies immer so ist, daß also folgende Aussage gilt:

$$a+b=1 \;\Rightarrow\; a^2+b=b^2+a$$

Zum Beweis:

$$\begin{aligned} & a+b=1 \\ \Rightarrow\quad & a=1-b \qquad 👍 \\ \Rightarrow\quad & a^2+b=(1-b)^2+b && (👍) \\ & \phantom{a^2+b}=1-2b+b^2+b && \text{(2. bin. Formel)} \\ & \phantom{a^2+b}=1-b+b^2 \\ & \phantom{a^2+b}=a+b^2 && (👍) \end{aligned}$$

In der Tat, unser erstes Ergebnis war kein Zufallstreffer. Und wenn man sein Augenmerk auf den in dem Beweis zugrundegelegten Zahlbereich richtet, so fällt auf, daß keinerlei Einschränkungen gemacht wurden.
Die (bei der Wahl der Beispiele zu Tage tretende) intuitive Annahme, bei den Zahlen a und b müsse es sich um Zahlen (vielleicht sogar <u>rationale</u> Zahlen) zwischen 0 und 1 handeln, ist also nicht tragbar. So sind z.B. die folgenden Zahlenpaare durchaus zugelassen:

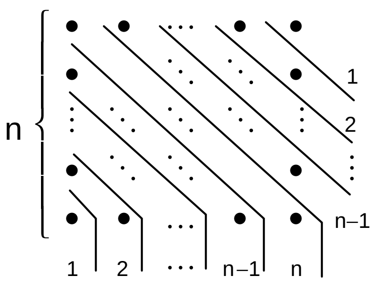
$a=-2, \qquad b=3;$

$a=12 \qquad b=-11$

$a=-\sqrt{3} \qquad b=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Der/die Leser(in) möge diese Beispiele selbst durchrechnen.

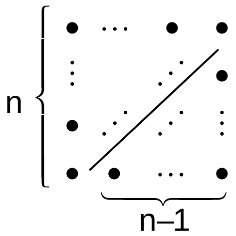
**Ü4**:
a)
Die Punkte, die jeweils die einzelnen Summanden repräsentieren, können z.B. wie folgt angeordnet werden:




Dabei entsteht ein quadratisches Punktmuster mit n Reihen à n Punkten, also insgesamt $n \cdot n = n^2$ Punkten.

t

b)
i)
Die Summe der Zahlen von 1 bis n läßt sich als dreieckige Punktkonfiguration mit der Seitenlänge n, die Summe der Zahlen von n–1 bis 1 als eine mit der Seitenlänge n–1 darstellen. Beide Dreiecke lassen sich wie folgt zu einem Quadrat der Seitenlänge n zusammenfügen:




Insgesamt ergeben sich wiederum $n \cdot n = n^2$ Punkte.

t

ii)

$$\begin{aligned} 1+2+3+...+(n-1)+n+(n-1)+...+2+1 &= [1+2+3+...+(n-1)+n]+[(n-1)+...+2+1] \\ &= D_n + D_{n-1} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n\left((n+1)+(n-1)\right)}{2} \qquad \text{(DIST)} \\ &= \frac{2n^2}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

t

c)

**IA**: Der Summenterm auf der linken Seite der Gleichung ist für $n=1$ nicht etwa „1+…+1+…+1“ sondern schlicht und einfach „1“! (Der Läufer läuft gar nicht erst los. Sein Startpunkt, die 1, ist gleichzeitig der Scheitelpunkt der Kurve.)

Wegen $1 = 1^2$ gilt die Formel für $n=1$.

**IS**: Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ beliebig aber fest.

**IV**: $1+2+3+...+(k-1)+k+(k-1)+...+2+1 = k^2$

**IB**: $1+2+3+...+k+(k+1)+k+...+2+1 = (k+1)^2$

$$\begin{aligned} & 1+2+3+...+k+(k+1)+k+...+2+1 \\ = \; & 1+2+3+...+(k-1)+k+[(k+1)+k]+(k-1)+...+2+1 && \text{(ASS „+“)} \\ = \; & 1+2+3+...+(k-1)+k+(k-1)+...+2+1+[(k+1)+k] && \text{(KOM „+“)} \\ = \; & k^2 + [(k+1)+k] && (\mathbf{IV}) \\ = \; & k^2 + [2k+1] && \text{(ASS „+“, KOM „+“)} \\ = \; & (k+1)^2 && \text{(1. bin. Formel)} \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion ist damit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

t

d)

Idee: Die Summe läßt sich so umstellen, daß sich jeweils zwei Summanden zu n addieren:

$$
\begin{aligned}
& 1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+2+1 \\
= {} & \phantom{+}\;\;1 \;\;+\;\; 2 \;\;+\ldots+(n-1)\;+n \\
& +(n-1)+(n-2)+\ldots+\;\;1 \\
= {} & \underbrace{(n+n+\ldots+n)}_{(n-1)\text{-mal}}+n && \text{(die übereinanderstehenden Summanden wurden zusammengefaßt)} \\
= {} & (n-1)\cdot n+n \\
= {} & n^2-n+n && \text{(DIST)} \\
= {} & n^2
\end{aligned}
$$

t

**Zusatzaufgabe 1:**

Wenn die Bibliothek beispielsweise 7 Bücher umfaßt, so enthält jedes Buch weniger als 7 Wörter, d.h. 6, 5, 4, 3, 2, 1 oder 0 Wörter. Zusätzlich soll gelten, daß die Wörteranzahlen der Bücher paarweise verschieden sind, es gibt demnach höchstens ein Buch mit 6 Wörtern, höchstens eines mit 5 Wörtern usw. Dann gibt es aber auch auf jeden Fall ein Buch mit 0 Wörtern, denn es stehen ja nur 7 verschiedene Wörteranzahlen für die 7 Bücher der Bibliothek zur Verfügung.

In einer n-viele Bücher umfassenden Bibliothek enthält dementsprechend ein Buch 0, 1, 2, ... oder (n–1)-viele Wörter. Von diesen n-vielen Wörteranzahlen muß jede zu einem der n-vielen Bücher gehören, wenn jeweils zwei Bücher unterschiedlich viele Wörter enthalten. Das bedeutet aber, daß es in der Bibliothek immer ein Buch <u>ohne</u> Wörter gibt, ein Buch dessen Inhalt also bekannt ist.

**Zusatzaufgabe 2:**

Es wird keine Angabe darüber gemacht, wo sich der Bär zum Zeitpunkt der Schußabgabe befand. Trotzdem genügt es anscheinend anzugeben, daß „genau nach Süden“ geschossen und damit der Bär erlegt wurde. Diese Angabe reicht aber nur an einem Ort der Welt aus: am nördlichen Magnetpol (nahe dem geographischen Nordpol), denn an dieser Stelle ist <u>jede</u> Richtung Süden, d.h. auch die Richtung, in die der Jäger schießt, ist stets „genau Süden“.

(Natürlich muß der Jäger trotzdem zielen, um den Bär zu treffen – das wird hier verschwiegen.)

Der Bär ist folglich weiß.

(vgl. Rückseite!)