Lösungen der Übungsaufgaben zu **Kapitel 10**

Vorbemerkung:

Im folgenden wird bei der Lösung der Übungsaufgaben häufig auf die in Kapitel 10 ausführlich hergeleiteten kombinatorischen Grundaufgaben zurückgegriffen. Durch die Anwendung der Formeln lassen sich die Aufgaben wesentlich kürzer lösen, als wenn die Aufgaben schrittweise unter Berücksichtigung aller möglichen Fälle angegangen würden. Der/die Leser(in) mache sich jedoch klar, daß eine Lösung der Aufgabe auch immer ohne Formelgebrauch möglich ist. Manchmal ist eine ausschließliche Anwendung nur einer Formel auch gar nicht möglich, und es liegt viel näher, die Aufgabe schrittweise zu erschließen.

Auf jeden Fall ist auf vollständige Begründungen zu achten (vgl. Seite 322 von Kapitel 10 des großen GEPAD) - die eigentlichen Ergebnisse der Aufgaben sind von geringerem Interesse (sie müssen noch nicht einmal komplett ausgerechnet werden). Auch das Addieren bzw. Multiplizieren von Teilergebnissen muß begründet werden (begründete Anwendung des Additions- bzw. Multiplikationsprinzips).

Der/die Leser(in) beachte den mit einem ☝ versehenen Hinweis in Ü9 !

Ü1:
Jeweils zwei Schüler(innen) spielen gegeneinander, d.h. aus den 30 Schülern müssen für jede Partie zwei Schüler(innen) ausgesucht werden. Die Frage lautet damit: Auf wieviel Arten kann man zwei Schüler(innen) ($k = 2$) aus einer Menge von 30 Schüler(innen) ($n = 30$) auswählen?

Sind innerhalb der jeweiligen Auswahlen Wiederholungen zulässig?

Nein, ansonsten wäre es möglich, daß sich Partien ergeben, bei denen ein(e) Schüler(in) gegen sich selbst spielt, solche Partien schließt das Schachturnier aber offensichtlich nicht ein.

Ist die Reihenfolge bei der Auswahl der/die Schüler(in) für die jeweilige Partie zu berücksichtigen?

Nein, es macht keinen Unterschied, ob für die Partie „X gegen Y" zuerst Schüler(in) X oder zuerst Schüler(in) Y ausgewählt wird - die beiden bestreiten auf jeden Fall diese Partie, und am Auslosungsergebnis kann man auch nicht mehr ablesen, welche(r) von beiden zuerst ausgewählt wurde.
Insgesamt ergibt sich:

Aus 30 Schüler(inne)n sind zwei Schüler(innen) *ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge* auszuwählen. Es läßt sich hier die dritte kombinatorische Grundaufgabe wiedererkennen, und die Aufgabe läßt sich mit der Formel $\binom{n}{k}$ lösen:

Es gibt $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1} = 435$ Möglichkeiten, aus 30 Schüler(inne)n 2 Schüler(innen) auf die angegebene Art und Weise auszuwählen.

Da damit alle verschiedenen Partiezusammenstellungen erfaßt werden, müssen **435 Spiele** ausgetragen werden, wenn jeder Spieler einmal gegen jeden spielen soll.

Ü2:

Jedes Menü soll eine Vor-, eine Haupt- und eine Nachspeise enthalten:

Vorspeise: eine der drei angebotenen Vorspeisen kann frei gewählt werden, also 3 Möglichkeiten

Hauptspeise: hierfür gibt es entsprechend 6 Möglichkeiten

Nachspeise: 4 Möglichkeiten

Jede Vorspeise kann nun mit jedem Hauptgang und mit jedem Dessert kombiniert werden, so daß es nach dem Multiplikationsprinzip insgesamt $3 \cdot 6 \cdot 4 = \mathbf{72}$ Möglichkeiten der **Menüzusammenstellung** gibt.

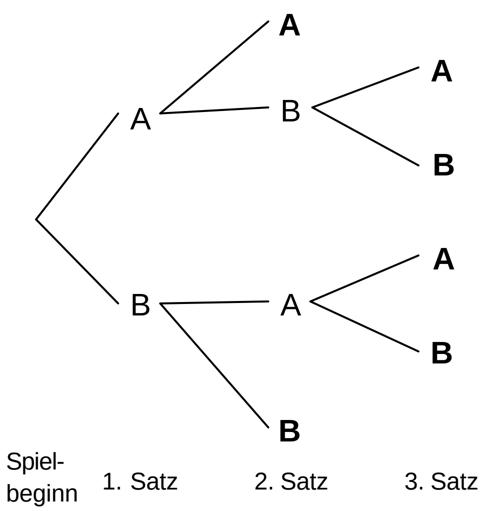
Die Lösung läßt sich sehr übersichtlich im Baumdiagramm darstellen (worauf hier jedoch verzichtet wird).

Ü3:

a)

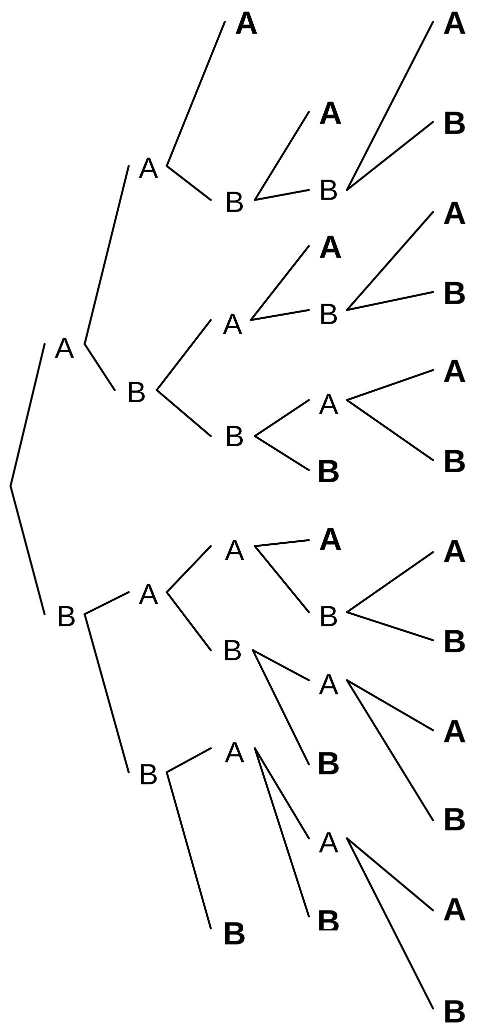
A: Spielerin A hat den Satz gewonnen

B: Spielerin B hat den Satz gewonnen



Es gibt **6** verschiedene **Spielverläufe**.

b)



Es gibt **20** verschiedene **Spielverläufe** (der zuletzt stattfindende Satz ist fetter gedruckt).

Ü4:

a)

Wie viele verschiedene sechsstellige Telefonnummern kann es geben?

Für die 1. Stelle: 9 Ziffern zur Wahl (1,2,...,9; die 0 kommt nicht in Frage, da Rufnummern - außer Sondernummern, die hier nicht in Betracht gezogen werden sollen - nie mit 0 beginnen)

Für die 2. bis 6. Stelle: 10 Ziffern zur Wahl (0,1,...,9)

Da jede Ziffer an der ersten Stelle mit jeder Ziffer an der zweiten Stelle kombiniert werden kann usf., müssen nach dem <u>Multiplikationsprinzip</u> die Teilergebnisse multipliziert werden, so daß sich insgesamt $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900\,000$ verschiedene sechsstellige Telefonnummern ergeben. Es müssen daher mindestens **900 001 Anschlüsse** vorhanden gewesen sein, damit eine Erweiterung nötig wurde.

b)
Wie viele vierstellige Telefonnummern kann es unter den angegebenen Bedingungen geben?

Für die 1. Stelle: 7 Ziffern zur Wahl (8 und 9 stehen laut Aufgabenstellung nie an erster Stelle, 0 kommt mit obiger Begründung nicht in Frage)

Für die 2. bis 4. Stelle: 10 Ziffern zur Wahl (0,1,...,9)

Mit derselben Begründung wie bei a) müssen die Teilergebnisse multipliziert werden, so daß sich insgesamt $7 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 7\,000$ verschiedene vierstellige Telefonnummern ergeben, d.h. es gibt höchstens **7 000 Anschlüsse** in Haßlinghausen.

Ü5:
Wenn Aneinanderreihungen von höchstens vier Punkten oder Strichen erlaubt sind, sind ein-elementige, zwei-elementige, drei-elementige und vier-elementige Zeichen möglich:

<u>Für ein-elementige Zeichen</u>: 2 Möglichkeiten (entweder Punkt oder Strich)

<u>Für zwei-elementige Zeichen</u>: Es gibt für beide Elemente des Zeichens zwei Möglichkeiten - Punkt oder Strich. Da die beiden Möglichkeiten für das erste Element des Zeichens mit den beiden für das zweite Element kombiniert werden können, gibt es nach dem <u>Multiplikationsprinzip</u> insgesamt $2 \cdot 2$ bzw. 2^2 Möglichkeiten. [Hier ist auch eine Anwendung der Formel n^k (Satz 10.1) möglich, die aber aufwendiger als die inhaltliche Begründung ist.]

<u>Für drei-elementige Zeichen</u>: Mit analogen Überlegungen ergibt sich: 2^3 Möglichkeiten

<u>Für vier-elementige Zeichen</u>: 2^4 Möglichkeiten

Die Teilmöglichkeiten stellen einzeln bereits jeweils eine vollständige Lösung dar (die ein-elementigen Zeichen stehen beispielsweise für die Buchstaben „e" und „t"), können also nicht mehr untereinander kombiniert werden, und daher werden nach dem <u>Additionsprinzip</u> die Teilergebnisse addiert.
Insgesamt lassen sich so $2+2^2+2^3+2^4 =$ **30 Zeichen** darstellen. Dies ist für die 26 Buchstaben und die drei Umlaute des deutschen Alphabets ausreichend, für Zahlzeichen und Satzzeichen jedoch nicht, so daß tatsächlich <u>auch fünf-elementige Zeichen notwendig</u> sind. [Mit den zusätzlichen 32 fünf-elementigen Zeichen ließen sich diese problemlos darstellen. Trotzdem werden für Satzzeichen sechs-elementige Zeichen verwendet.]

Ü6:
Fliegt eine Birne an einem Apfelbaum vorbei.

Sagt der Apfel: „Hey Birne - Du kannst ja fliegen!"

„Ja", antwortet die Birne, „ich bin ja auch die Birne Maja."

Aus einem großen Vorrat von drei verschiedenen Obstsorten kann der Käufer sich beim Obsthändler ein Dutzend Früchte zusammenstellen.

Die entscheidende Frage ist nun, was ist n (die Anzahl der Elemente, aus denen welche ausgewählt wird) und was ist k (die Anzahl der Elemente, die tatsächlich ausgewählt werden)?
Häufig wird nun $n = 12$ und $k = 3$ gesetzt, und das ist genau falsch, denn es werden ja nicht aus 12 Früchten drei ausgewählt, sondern ausgewählt werden auf jeden Fall 12 Früchte. Der falsche Ansatz liegt wohl deswegen so nahe, weil bei den meisten Aufgaben n größer als k ist. Dies muß aber nicht so sein. Wenn nämlich Wiederholungen zugelassen sind (und nur dann) können durchaus mehr Elemente ausgewählt werden, als zur Auswahl zur Verfügung stehen, da ein und dasselbe Element ja mehrfach ausgewählt werden kann. Man kann sich das so vorstellen, daß Kunde die Obstsorte auswählt und der Händler aus einem ausreichend großen Vorrat an Früchten dieser Obstsorte dann welche einpackt. So ist es durchaus möglich, daß jemand 12 Orangen kauft und die anderen Obstsorten verschmäht.

Also: $n = 3$ und $k = 12$

Sind Wiederholungen bei den Auswahlen zulässig?
Ja, wie bereits ausgeführt.

Ist die Reihenfolge bei der Auswahl der Früchte für die jeweilige Zusammenstellung zu berücksichtigen?
Nein, da es keinen Unterschied macht, ob ein Kunde beispielsweise zuerst die Birnen und dann die Äpfel aussucht (oder ausgesucht bekommt), die Endzusammenstellung an Früchten bleibt dieselbe, und an dieser läßt sich auch nicht mehr erkennen, wie die Auswahl vonstatten ging.

Aus 3 Obstsorten soll also 12mal jeweils eine Sorte *mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge* ausgewählt werden. Es läßt sich hier die vierte kombinatorische Grundaufgabe wiedererkennen, und die Aufgabe läßt sich mit der Formel $\binom{k+(n-1)}{n-1}$ lösen:

Es gibt $\binom{\mathbf{12+(3-1)}}{\mathbf{3-1}} = \binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91$ Möglichkeiten, aus 3 Obstsorten Früchte auf die angegebene Art und Weise auszuwählen, es sind also **91** verschiedene **Einkäufe** möglich.

Wenn jede Obstsorte mindestens einmal vertreten sein soll, werden ein Apfel, eine Orange und eine Birne auf jeden Fall gekauft, d.h. die Wahl ist nur noch auf $12-3 = 9$ Früchte beschränkt, d.h. $k = 9$. Analog zu oben gibt es $\binom{\mathbf{9+(3-1)}}{\mathbf{3-1}} = \binom{11}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = \mathbf{55}$ verschiedene **Einkäufe**, wenn jede Obstsorte mindestens einmal vertreten sein soll.

Ü7:
Aus den 10 Buchstaben des Wortes „Klarabella“ sollen neue Wörter gebildet werden, diese Wörter bestehen dann ebenfalls aus 10 Buchstaben. Auch wenn es die Aufgabenstellung nicht ausdrücklich verlangt, so soll doch mit dem Wort „anordnen“ angedeutet werden, daß jeder Buchstabe im neuen Wort vorkommen muß, und zwar so häufig, wie er in „Klarabella“ vorkommt. Gefragt ist also nach der Anzahl der Möglichkeiten, die 10 Stellen (Buchstabenplätze) des neuen Wortes zu besetzen:

Auf den ersten Blick gibt es für die erste Stelle des neuen Wortes 10 Möglichkeiten (einen der zehn Buchstaben des Wortes „Klarabella“), für die zweite noch neun Möglichkeiten, da ein Buchstabe bereits für die erste Stelle verwendet wurde und somit nicht mehr zur Verfügung steht, usw.
Insgesamt gibt es daher $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ Möglichkeiten, die Stellen mit Buchstaben zu besetzen.

Auf dieses Ergebnis kommt man auch mit der Grundaufgabe 2 : Es handelt sich hierbei um eine Auswahl von 10 Buchstaben ($k=10$) aus den 10 Buchstaben des Wortes „Klarabella“ ($n=10$). Ausgewählt wird ohne Wiederholung (ein Buchstabe darf nur so häufig ausgewählt werden, wie er in dem Ausgangswort vorkommt) und mit Berücksichtigung der Reihenfolge (unterschiedliche Reihenfolgen der Auswahl bedingen verschiedene Anordnungen der Buchstaben und damit neue Wörter).
Nun ist 10! aber nicht das Endergebnis, denn bei obigen Überlegungen wurde nicht berücksichtigt, daß „Klarabella“ nicht nur unterschiedliche Buchstaben enthält, das „a“ und das „l“ kommen mehrfach vor. Bei obigen Überlegungen wurde die Reihenfolge der Auswahl berücksichtigt, während das beispielsweise für die „a’s“ keinen Sinn macht, da diese nicht unterscheidbar sind und es daher nicht relevant ist, ob zuerst das erste „a“ von „Klarabella“ und dann das zweite oder in umgekehrter Reihenfolge ausgewählt wird. Damit ergibt sich hier der gleiche Sachverhalt wie bei Beispielaufgabe 1, Teil 2:
Nicht unterscheidbare Möglichkeiten wurden als verschieden und damit zu viel gezählt. Es wurden entsprechend den Ausführungen von Beispielaufgabe 2 diejenigen Möglichkeiten zu viel gezählt, die es gibt, drei Buchstaben mit Berücksichtigung der Reihenfolge (und ohne Wiederholung) auszuwählen - und dies sowohl für das „a“ als auch für das „l“.
Um drei Buchstaben derart auszuwählen, gibt es nach Grundaufgabe 2 genau $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.
Da bei jeder Auswahl der 10 Buchstaben 6 Möglichkeiten statt einer für die „a’s“ und 6 Möglichkeiten statt einer für „l’s“ gezählt wurden, müssen die oben erhaltenen Möglichkeiten noch zweimal durch 6 bzw. 3! dividiert werden, da jeweils statt einer Möglichkeit 6 gezählt wurden:
Insgesamt kann man daher auf $\frac{10!}{3! \cdot 3!}$ (= **100 800**) **Arten** die Buchstaben des Wortes „Klarabella“ anordnen.

Diese Aufgabe läßt sich auch noch anders lösen:

Man wählt aus den 10 Stellen des neuen Wortes immer nur Stellen für gleiche Buchstaben aus, wobei dann feststeht, daß die Reihenfolge keine Rolle spielt (wie oben erläutert).
Ausgewählt wird also weiterhin ohne Wiederholung aber **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge, so daß die Grundaufgabe 3 und die Formel $\binom{n}{k}$ angewendet werden können.
Zuerst wird beispielsweise die Stelle für den Buchstaben „k“ ausgewählt. Um von 10 Stellen eine ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen, gibt es $\binom{10}{1}$ Möglichkeiten.

Ist die Stelle für „k“ ausgewählt, bleiben noch 9 weitere Stellen zu besetzen. Nun werden z.B. die drei „l’s“ ausgewählt. Analog zu „k“ gibt es dafür $\binom{9}{3}$ Möglichkeiten. Für die drei „a’s“ bleiben dann noch $\binom{6}{3}$, für das „r“ $\binom{3}{1}$, für das „b“ $\binom{2}{1}$, für das „e“ $\binom{1}{1}$ Möglichkeiten der Auswahl.

Da diese Teilergebnisse noch kombiniert werden müssen, damit sich ein neues Wort mit 10 Buchstaben ergibt, werden sie nach dem Mulitplikationsprinzip multipliziert. Insgesamt lassen sich also auf $\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}$ (= **100 800**) **Arten**, Wörter aus den Buchstaben des Wortes „Klarabella“ bilden.

Bemerkung:
Es macht bei obiger Berechnung der Möglichkeiten keinen Unterschied, ob man mit der Auswahl der „k’s“ oder mit einem anderen Buchstaben beginnt, die Reihenfolge der Auswahl ist für das Endergebnis irrelevant.

Übrigens:
Wer die Aufgabenstellung aufmerksam gelesen hat, hat bemerkt, daß das Wort „Klarabella“ selbst keine Lösung im Sinne der Aufgabe ist, da kein neues Wort entstanden ist. Daher muß diese Möglichkeiten strenggenommen abgezogen werden, und es gibt **100 799 Arten**, neue Wörter aus den Buchstaben des Wortes „Klarabella“ zu bilden.

Ü8:
Es werden aus 12 Tönen ($n=12$) jeweils 8 Töne ($k=8$) für die Tonfolge ausgewählt.

a)
Die Auswahl findet mit Berücksichtigung der Reihenfolge (bei einer Tonfolge ist natürlich die Reihenfolge der vorkommenden Töne relevant) und mit Wiederholung (Töne dürfen beliebig oft wiederholt werden) statt. Es läßt sich daher die erste Grundaufgabe wiedererkennen und die Formel n^k anwenden:
Es gibt $\mathbf{12^8}$ verschiedene derartige **Tonfolgen**.

b)
Die Auswahl findet weiterhin mit Berücksichtigung der Reihenfolge aber ohne Wiederholung (kein Ton darf doppelt vorkommen) statt, damit läßt sich hier die zweite Grundaufgabe und die Formel $\frac{n!}{(n-k)!}$ anwenden:

Es gibt $\frac{12!}{(12-8)!} = \mathbf{12 \cdot 11 \cdot ... \cdot 5}$ verschiedene derartige **Tonfolgen**.

c)
Es dürfen jeweils höchstens 7 verschiedene Töne auftreten, d.h., daß mindestens ein Ton doppelt vorkommen muß, also können Töne beliebig oft vorkommen, nur der Fall, daß kein Ton doppelt vorkommt, ist ausgeschlossen.
Bei a) ging es um Tonfolgen, bei denen Töne beliebig häufig vorkommen dürfen, unter b) um diejenigen, bei denen kein Ton doppelt vorkommen darf. Wenn man nun von allen bei a) erhaltenen Möglichkeiten die bei b) erhaltenen subtra-

hiert, erhält man genau die Möglichkeiten für Tonfolgen, bei denen mindestens ein Ton doppelt vorkommt:
Es gibt $\mathbf{12^8 - 12 \cdot 11 \cdot ... \cdot 5}$ verschiedene derartige **Tonfolgen**.

d)
Wenn der erste und der letzte Ton gleich sind, müssen nur noch <u>sieben</u> Töne aus den 12 zur Verfügung stehenden ausgewählt werden (d.h. $k = 7$). Ist nämlich der erste Ton ausgewählt, ist damit automatisch auch der letzte bestimmt.
Da wie bei b) kein Ton doppelt auftreten darf, ergeben sich analog zu b) $\frac{12!}{(12-7)!}$ $= \mathbf{12 \cdot 11 \cdot ... \cdot 6}$ verschiedene derartige **Tonfolgen**.

e)
Der zweimal vorkommende Ton ist einer der 12 zur Verfügung stehenden, also gibt es für seine Auswahl 12 Möglichkeiten.
Dieser Ton tritt an 2 der 8 Stellen der Tonfolge auf. Wieviel Möglichkeiten gibt es für die Plazierung diese Tones?
Analog zu der Auswahl der Stellen für gleiche Buchstaben in Ü7 gibt es für die Auswahl von 2 Stellen für zwei nicht unterscheidbare Töne aus 8 Stellen $\binom{8}{2}$ Möglichkeiten. Da es diese Möglichkeiten für jeden der möglichen 12 Töne ergeben, können diese beiden Stellen in der Tonfolge auf $12 \cdot \binom{8}{2}$ besetzt werden.

Damit wären schon einmal zwei Stellen der Tonfolge besetzt.

Für die dritte zu besetzende Stelle kommt einer der 11 noch zur Verfügung stehenden Töne (der bereits ausgewählte zweimal vorkommende Ton kann nicht noch einmal ausgewählt werden) in Frage, für die vierte 10 usw. und für die achte schließlich 6.

Die Möglichkeiten für die einzelnen Töne müssen miteinander kombiniert werden, damit sich eine Tonfolge der Länge 8 ergibt, so daß die erhaltenen Anzahlen nach dem <u>Multiplikationsprinzip</u> multipliziert werden:
Es gibt $\mathbf{12 \cdot \binom{8}{2} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$ verschiedene derartige **Tonfolgen**.

f)
Zunächst hält man fest, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus den 12 zur Verfügung stehenden Tönen 4 auszusuchen, die jeweils zweimal auftreten.
Dafür gibt es $\binom{12}{4}$ Möglichkeiten, da diese Töne zunächst <u>ohne</u> Berücksichtigung der Reihenfolge (und ohne Wiederholung) ausgewählt werden.
Für den zuerst zu verteilenden doppelt vorkommenden Ton werden dann zwei Stellen aus den 8 möglichen ausgesucht, dafür gibt es analog zu e) $\binom{8}{2}$ Möglichkeiten. Für den zweiten zweimal vorkommenden Ton wählt man entsprechend 2 Stellen aus den verbleibenden 6 auf $\binom{6}{2}$ Arten aus usw. Auch diese Teilergebnisse werden <u>nach dem Multiplikationsprinzip</u> multipliziert:
Es gibt $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$ verschiedene derartige Tonfolgen.

Wie bei der „Klarabella-Aufgabe“ (Ü7) gibt es auch hier einen anderen Weg, um zur Lösung zu gelangen:
Zunächst hält man fest, daß es analog zur ersten Lösung $\binom{12}{4}$ Möglichkeiten für die Auswahl der doppelt vorkommenden Töne gibt.
Dann werden von den 8 Stellen 8 nacheinander ausgesucht, um sie mit Tönen zu besetzen, und zwar ohne Wiederholung (ist eine Stelle besetzt, kann sie nicht noch einmal ausgewählt werden) und mit Berücksichtigung der Reihenfolge (Reihenfolge der Stellenauswahl für Töne bestimmt die Tonfolge): Dies ist auf 8! Arten möglich.
Analog zu Ü7 ist dabei aber nicht berücksichtigt worden, daß <u>jeweils</u> zwei Töne nicht unterscheidbar sind und die Möglichkeiten für diese doppelt gezählt wurden. Daher muß die Anzahl der Möglichkeiten noch für jedes der vier Paare gleicher Töne durch 2 bzw. durch 2! dividiert werden: $\frac{8!}{2!2!2!2!}$ Möglichkeiten, die vier gleichen Töne anzuordnen.
Diese Möglichkeiten der Anordnung gibt es für jede Auswahl von 4 Tönen, also:
Insgesamt ergeben sich so $\binom{12}{4} \cdot \frac{8!}{2!2!2!2!}$ ($=$ **29 937 600**) verschiedene derartige **Tonfolgen**.

<u>Bemerkung:</u>
$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot 1 = \frac{8!}{2!2!2!2!}$

Ü9:
Die Aufgabenstellung ist recht unklar: Was bedeutet „für den Sommerurlaub“? Machen die Arbeitnehmer nacheinander Urlaub [1] oder soll das Urlaubnehmen während einer festgelegten Zeit betrachtet werden [2]?

Wie bei vielen kombinatorischen Aufgaben muß der/die Leser(in) sich hier überlegen, welche der in Frage kommenden Möglichkeiten wohl gemeint sein könnte. Die vom Aufgabensteller gemeinten Möglichkeiten entsprechen (leider) nicht unbedingt der Lebenswirklichkeit. Auf jeden Fall kommen alle diejenigen Möglichkeiten nicht in Betracht, die sich mit den angegebenen Daten nicht sicher berechnen lassen (hier: Für die Bearbeitung von Variante [1] reichen die gegebenen Informationen nicht aus.). Entscheidend ist, daß der Bearbeiter der Aufgabe angibt, <u>wie er die Aufgabe verstanden hat</u> und wie er sie daher bearbeiten möchte. Auch wenn nun der Korrektor die Aufgabe anders verstanden hat, so bekommt er damit die Möglichkeit, den Rechenweg des Aufgabenlösers zu verstehen (und angemessen zu bepunkten).

Hier ist anscheinend danach gefragt, welche Möglichkeiten des <u>gleichzeitigen</u> Urlaubnehmens es gibt. Wenn <u>höchstens drei</u> Arbeitnehmer gleichzeitig Urlaub nehmen können, so nehmen entweder 3, 2, ein oder kein Arbeitnehmer Urlaub:

1. Fall: 3 Arbeitnehmer nehmen Urlaub: Aus den 8 Arbeitnehmern müssen 3 ausgewählt werden, und zwar ohne Wiederholungen (ein Arbeiter kann nur einmal ausgesucht werden) und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (für die Festlegung des Urlaubsplans ist es nicht relevant, in welcher Reihenfolge die Arbeitnehmer ausgewählt wurden).

Damit läßt sich die dritte Grundaufgabe und die Formel $\binom{n}{k}$ anwenden: Es gibt hierfür $\binom{8}{3}$ Möglichkeiten.

2. Fall: 2 Arbeitnehmer nehmen Urlaub: Entsprechend zum 1. Fall gibt es $\binom{8}{2}$ Möglichkeiten.

3. Fall: 1 Arbeitnehmer nimmt Urlaub: Es gibt $\binom{8}{1}$ Möglichkeiten.

4. Fall: Kein Arbeitnehmer nimmt Urlaub: Es gibt dafür eine Möglichkeit (man könnte auch $\binom{8}{0}$ schreiben, aber das wäre ein bißchen wie mit Kanonen auf Spatzen ...).

Jedes Teilergebnis repräsentiert eine eigenständige Möglichkeit der Urlaubsregelung, die Teilergebnisse müssen nicht untereinander kombiniert werden.

Die Anzahlen der Möglichkeiten werden daher nach dem Additionsprinzip addiert: Für den Sommerurlaub gibt es insgesamt $\binom{8}{3}+\binom{8}{2}+\binom{8}{1}+1 =$ **93 Möglichkeiten**.

Ü10:
Aus 10 Delegationsmitgliedern sollen 5 ausgewählt werden, wobei 2 der Ausgewählten von den anderen zu unterscheiden sind, nämlich der Leiter und der Stellvertreter. Die weiteren Hauptmitglieder hingegen werden hier nicht unterschieden.
Während offensichtlich ist, daß die Auswahl ohne Wiederholungen durchgeführt wird (ist ein Delegationsmitglied bereits ausgewählt, kommt es nicht mehr für eine erneute Auswahl in Frage), ist es schwerer zu entscheiden, wie man bezüglich der Berücksichtigung der Reihenfolge verfahren soll: Nach obiger Überlegung ist die Reihenfolge für die Auswahl des Leiters und des Stellvertreters relevant, während sie für die Auswahl der weiteren Hauptmitglieder keine Rolle spielt. Deswegen ist es angebracht, die Auswahl des Leiters und des Stellvertreters von der der weiteren Hauptmitglieder bei der Bestimmung aller möglichen Auswahlen zu trennen:

1. Auswahl des Leiters und des Stellvertreters:
Für den Leiter gibt es 10 Möglichkeiten (einer der 10 Delegationsmitglieder), für den Stellvertreter 9 (ein Delegationsmitglied kann nicht mehr ausgewählt werden, da es bereits zum Leiter bestimmt wurde). Da jede Möglichkeit für den Leiter mit jeder für den Stellvertreter kombiniert werden kann, gibt es nach dem Multiplikationsprinzip $10 \cdot 9$ Möglichkeiten für die Delegationsspitze.

2. Auswahl der Hauptmitglieder:
Für die Delegationsspitze wurden bereits 2 Mitglieder ausgewählt, so daß die Wahl der 3 weiteren Hauptmitglieder ($k = 3$) aus den verbleibenden 8 Delegationsmitgliedern erfolgt. Die Auswahl, erfolgt wie oben herausgestellt, ohne Wiederholung und auch die Reihenfolge wird nicht berücksichtigt, da es keinen Unterschied macht, in welcher Reihenfolge die Delegationsmitglieder zu Hauptmitgliedern gewählt werden.

Damit findet wiederum Grundaufgabe 3 und die Formel $\binom{n}{k}$ ihre Anwendung: Es gibt $\binom{8}{3}$ Möglichkeiten für die Auswahl der weiteren Hauptmitglieder.

Da die Auswahl der Delegationsspitze und die der weiteren Hauptmitglieder kombiniert werden müssen, werden die Ergebnisse nach dem Multiplikationsprinzip multipliziert:
Es gibt insgesamt $\mathbf{10 \cdot 9 \cdot \binom{8}{3}} = \mathbf{5040}$ **Möglichkeiten** der Auswahl.

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man zuerst alle 5 Hauptmitglieder auswählt und dann die Möglichkeiten bestimmt, unter diesen einen Leiter und einen Stellvertreter zu wählen.
So ergibt sich:

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3} = \frac{10!}{5!5!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 5040$$

Ü11:
Der erste Ehrengast hat die Qual der Wahl zwischen den 16 zur Verfügung stehenden Plätzen, der zweite kann einen unter 15 Sitzplätzen wählen (einer ist ja bereits durch den ersten Gast besetzt) usf., der zehnte und letzte Ehrengast kann immerhin noch eine Auswahl unter 7 Plätzen treffen. Da die Möglichkeiten für die einzelnen Ehrengastplätze kombiniert werden müssen, werden die Teilergebnisse nach dem Multiplikationsprinzip multipliziert:
Es gibt demnach $\mathbf{16 \cdot 15 \cdot ... \cdot 7}$ **Möglichkeiten der Sitzanordnung**.

Die Aufgabe kann auch mit der zweiten Grundaufgabe gelöst werden, da aus 16 Plätzen ($n = 16$) 10 für Ehrengäste ($k = 10$) mit Berücksichtigung der Reihenfolge (ob ein fester Platz für diesen und jenen Ehrengast ausgesucht wird, ist für die Sitzordnung relevant) und ohne Wiederholung
(es ist nicht vorgesehen, daß ein Gast mehrere Stühle zugewiesen bekommt) ausgesucht werden: $\frac{16!}{(16-10)!} = 16 \cdot 15 \cdot ... \cdot 7$

Ü12:
a)
Aus 10 Aufgaben ($n = 10$) sollen 8 ($k = 8$) ausgewählt werden (die dann hoffentlich richtig beantwortet werden). Offensichtlich sind dabei Wiederholungen nicht gestattet, da es keinen Sinn macht einunddieselbe Aufgabe mehrmals zur Beantwortung auszuwählen. Auch die Reihenfolge wird nicht berücksichtigt, da es nur darauf ankommt, welche Aufgaben bearbeitet wurden und nicht in welcher Reihenfolge sie dazu ausgewählt wurden. Der Anwendung von Grundaufgabe 3 und der zugehörigen Formel $\binom{n}{k}$ steht also nichts mehr im Wege:

Es gibt $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{8}} = \mathbf{45}$ **Auswahlmöglichkeiten**.

b)
Wenn die ersten drei Aufgaben auf jeden Fall beantwortet werden müssen, verbleiben noch 7 ($n = 7$) Aufgaben, aus denen die weiteren noch zu lösenden 5 (damit es insgesamt 8 sind) ausgewählt werden müssen ($k = 5$). Mit analoger Argumentation erhält man unter Anwendung von Grundaufgabe 3:
Es gibt $\binom{7}{5} = \mathbf{21}$ derartiger **Auswahlmöglichkeiten**.

Ü13:
Für jede Münze gibt es nur zwei Möglichkeiten: entweder kommt sie in Tasche 1 oder in Tasche 2. Da nun die Möglichkeiten für die 1. Münze mit denen der 2. Münze kombiniert werden müssen, werden die Teilergebnisse nach dem Multiplikationsprinzip multipliziert:
Auf $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7}$ **Arten** lassen sich die Münzen verteilen.

Etwas komplizierter läßt sich die Aufgabe auch mit Hilfe eines Satzes aus der Mengenlehre (Satz 3.6) lösen:
Es genügt zu betrachten, welche Münzen jeweils in einer Tasche sind, denn diese bestimmen, welche sich in der anderen befinden. Daher kann man die Anzahl aller Teilmengen einer 7-elementigen Menge betrachten, denn jede Teilmenge gibt eine andere Münzverteilung wieder.
Nach Satz 3.6 hat eine n-elementige Menge 2^n-viele Teilmengen, eine 7-elementige Menge also 2^7-viele Teilmengen.

Ü14:
Diese Aufgabe ähnelt nicht nur wegen ihres hohen Zuckergehaltes stark der Schokoriegel-Aufgabe (der dritten Beispielaufgabe des Kombinatorik-Kapitels). Wer diese Aufgabe bisher nicht oder nur unvollständig gelöst hat, sollte vielleicht diese Aufgabe noch einmal gründlich durchgehen (ab S. 306 im großen GEPAD) und eine analoge Lösung dieser Aufgabe selbst probieren.

a)
Diese Aufgabe läßt sich analog zu Ü6 lösen.

Aus 4 Tortensorten ($n = 4$) soll 8mal ($k = 8$) eine Sorte ausgewählt werden, das ist nur mit Wiederholung möglich. Die Reihenfolge der Auswahl der Sorten ist uninteressant, es kommt nur darauf an, was schließlich tatsächlich von Eva-Maria gekauft wird. Hier läßt sich daher die vierte Grundaufgabe und die Formel $\binom{k+(n-1)}{n-1}$ anwenden:

Eva-Maria hat $\binom{8+(4-1)}{4-1} = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \mathbf{165}$ **Wahlmöglichkeiten**.

b)
Wenn Eva-Maria von jeder Sorte mindestens ein Stück haben möchte, sind 4 Kuchenstücke bereits ausgewählt, und es müssen nur noch 4 weitere Kuchenstücke ausgewählt werden. Die Auswahl der 4 Kuchensorten für diese Stücke aus den vorhandenen 4 Kuchensorten verläuft genauso wie bei a):
Eva hat unter diesen Voraussetzungen noch $\binom{4+(4-1)}{4-1} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \mathbf{35}$ **Wahlmöglichkeiten**.

Ü15:
Diese Aufgabe ähnelt sehr der Aufgabe Ü10, so daß die Überlegungen ein wenig kürzer gefaßt werden können. Leser(innen), die Ü15 noch nicht oder nicht vollständig gelöst haben, sollten zuerst Ü10 und die dort gegebenen Lösungshinweise lesen und dann noch einmal versuchen, diese Aufgabe zu lösen.

1. Lösungsweg: Zuerst wird der Ausschuß gewählt, dann der Vorsitzende:

Aus 45 Personen sollen 9 für den Ausschuß ausgewählt werden. Wiederholungen sind nicht zulässig (eine Personen kann nur einmal ausgewählt werden) und die Reihenfolge der Auswahl ist nicht zu berücksichtigen (bei der Zusammenstellung des Ausschusses ist es nicht von Belang, wann eine Person für den Ausschuß ausgewählt wurde).

Es wird hier also erneut ausgewählt, wie es in Grundaufgabe 3 und der zugehörigen Formel $\binom{n}{k}$ festgehalten wurde: Es gibt $\binom{45}{9}$ Möglichkeiten für den Ausschuß.

Unter diesen 9 Ausschußmitgliedern muß dann noch ein Vorsitzender gewählt werden: Weil potentiell jedes der Ausschußmitglieder in Frage kommt, gibt es dafür 9 Möglichkeiten.
Jede Möglichkeit für den Ausschuß kann mit jeder Möglichkeit für den Vorsitzenden kombiniert werden, so daß nach dem Multiplikationsprinzip die Teilergebnisse multipliziert werden:
Es gibt insgesamt $\binom{45}{9} \cdot 9$ **Möglichkeiten**.

2. Lösungsweg: Zuerst wird der Vorsitzende gewählt, dann der Ausschuß:

Um aus 45 Personen einen Vorsitzenden auszuwählen, gibt es 45 Möglichkeiten. Aus den verbleibenden 44 müssen dann noch 8 für den Ausschuß bestimmt werden (der Vorsitzende ist ja schon im Ausschuß). Dafür gibt es mit analoger Argumentation $\binom{44}{8}$ Möglichkeiten. Auch diese Teilergebnisse müssen multipliziert werden:
Es gibt insgesamt $\mathbf{45} \cdot \binom{44}{8}$ **Möglichkeiten**.

Bemerkung:
Auch wenn es auf den ersten Blick nicht so aussieht, so hat man doch bei beiden Lösungswegen dieselbe Anzahl von Möglichkeiten erhalten (nämlich 7 975 468 215).

Ü16:
Welche „Nationenpaare“ lassen sich aus den drei angegebenen Nationen bilden?
Es gibt drei mögliche Paare: FE, FD und ED. Dabei sind EF, DF und DE keine weiteren Paare, da die Reihenfolge in einem Nationenpaar keine Rolle spielt.

Möglichkeiten für FE: Der französische Staatsbürger kann einer der 5 zur Verfügung stehenden sein, der englische einer von 10. Jede Wahl eines Franzosen kann mit jeder Auswahl eines Engländers kombiniert werden, daher werden nach dem Multiplikationsprinzip die Teilergebnisse multipliziert:
Es gibt $5 \cdot 10 = 50$ solcher Paare.

Möglichkeiten für FD: Analog zu den Möglichkeiten für FE erhält man hier:
Es gibt $5 \cdot 6 = 30$ solcher Paare.

Möglichkeiten für ED: Entsprechend ergibt sich hier:
Es gibt $10 \cdot 6 = 60$ solcher Paare.

Obige Fälle stellen jeweils vollständige Lösungen der Aufgabenstellung dar und werden nicht mehr untereinander kombiniert, so daß nach dem Additionsprinzip die Teilergebnisse addiert werden:
Es gibt insgesamt $50+30+60 =$ **140 Möglichkeiten**.

Ü17:
Von 12 Schüler(inne)n sollen 3 für Klasse a, 4 für Klasse b und 5 für Klasse c ausgewählt werden.
Zunächst können beispielsweise die Schüler(innen) für Klasse a ausgewählt werden:
Aus 12 Schüler(inne)n werden 3 ausgesucht, und zwar ohne Wiederholung (ein(e) Schüler(in) kann nicht mehrfach für eine Klasse ausgewählt werden) und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (es ist entscheidend, welche Schüler(innen) in welche Klasse kommen - nicht in welcher Reihenfolge sie dafür ausgesucht wurden). Damit wird auch hier die Grundaufgabe 3 und die zugehörige Formel $\binom{n}{k}$ angewendet: Es gibt $\binom{12}{3}$ Möglichkeiten für Klasse a.

Für Klasse b:
Von den 12 Schüler(inne)n sind 3 bereits verteilt, so daß von den restlichen 9 nun 4 für Klasse b ausgesucht werden: Analog zu obigen Überlegungen gibt es dafür $\binom{9}{4}$ Möglichkeiten.
Für Klasse c:
Den restlichen 5 Schüler(inne)n bleibt nichts anderes übrig, als sich in Klasse c zu begeben, dafür gibt es nur eine Möglichkeit (um aus 5 Schüler(inne)n 5 auszuwählen, gibt es $\binom{5}{5} = 1$ Möglichkeit).

Da die Einzelmöglichkeiten noch untereinander kombiniert werden müssen, werden nach dem Multiplikationsprinzip die Teilergebnisse multipliziert:
Man kann die Verteilung insgesamt auf $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5} = \mathbf{220 \cdot 126 \cdot 1 = 27\,720}$ **Arten** vornehmen.

Ü18:
Vorbemerkung:
Diese Aufgabenstellung ist typisch für Kombinatorikaufgaben: Durch die inhaltliche Einkleidung wird ein Realitätsbezug vorgegaukelt, der tatsächlich nicht vorhanden ist: Welcher Zug fährt schon mit wild gemischten Gepäck-, Güter- und Personenwagen? Der/die Leser(in) lasse sich von der inkonsequenten Umsetzung von Alltagsproblemen bei vielen Kombinatorikaufgaben nicht stören, sie enthalten eben vielfach Vereinfachungen oder Veränderungen damit die Aufgabe auf einfache Weise lösbar ist.

Diese Aufgabe läßt sich analog zur „Klarabella"-Aufgabe (Ü7) lösen, der/die Leser(in) sei aufgefordert, zuerst (oder im Anschluß) diese Aufgabe zu bearbeiten.

Aus den vorgegebenen Wagen soll ein Zug zusammengestellt werden, der dann insgesamt $4+3+6 = 13$ Wagen enthält. Dabei gibt es drei verschiedene Arten von Wagen, die untereinander jeweils als nicht unterscheidbar gelten sollen. Zunächst sollen die Möglichkeiten für ausschließlich unterscheidbare Wagen berechnet werden:
Wären die Wagen alle unterschiedlich, so gäbe es für den ersten Platz hinter der Lokomotive 13 Möglichkeiten, für den zweiten noch 12 (da ein Platz bereits für den ersten Wagen ausgewählt wurde) usf. und für den letzten Platz nur noch eine Möglichkeit. Nach dem Multiplikationsprinzip ergeben sich dann $13 \cdot 12 \cdot ... \cdot 1 = 13!$ Möglichkeiten.
Dasselbe Ergebnis erhält man mit Grundaufgabe 2 für $n = 13$ und $k = 13$.
Nun muß noch berücksichtigt werden, daß die Wagenarten untereinander jeweils nicht unterscheidbar sein sollen, d.h. es macht keinen Unterschied, ob beispielsweise der erste oder der zweite Gepäckwagen das Schlußlicht des Zuges bildet. Wie in Beispielaufgabe 1, Teil 2 des Kombinatorikkapitels und in Ü7 ausgeführt, sind genau die Möglichkeiten für die Anordnung von 4 Gepäckwagen, die Möglichkeiten für die Anordnung der 3 Güterwagen und die der Anordnung der 6 Personenwagen zu viel gezählt worden. Es gibt 4! Möglichkeiten der Anordnung von 4 Gepäckwagen, 3! für die Güterwagen und 6! für die Personenwagen, wenn jeweils die Reihenfolge berücksichtigt wird. Diese Möglichkeiten wurden bei jeder Auswahl von Wagen zu viel gezählt, so daß die oben erhaltenen Möglichkeiten noch durch $4! \cdot 3! \cdot 6!$ dividiert werden müssen:
Es lassen sich auf $\frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 6!}$ Arten Züge bilden.

Ü19:
Für seine Mannschaft braucht der FC 3 Stürmer, die er aus den 5 ihm zur Verfügung stehenden auswählen kann ($n = 5$, $k = 3$). Wiederholungen sind dabei nicht zugelassen (ein Spieler kann nicht mehrfach für die Mannschaft ausgewählt werden) und auch die Reihenfolge ist nicht zu berücksichtigen (für die Mannschaftsaufstellung ist entscheidend, wer ausgewählt wurde und nicht in welcher Reihenfolge). Damit ist auch hier wieder die Grundaufgabe 3 und die Formel $\binom{n}{k}$ anzuwenden: Für die Auswahl der Stürmer gibt es $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten.
Analog gibt es für die Auswahl der Läufer $\binom{5}{4}$, für die Auswahl der Verteidiger $\binom{4}{3}$ und für die Auswahl der Torwarts $\binom{2}{1}$ (wenn allerdings nicht beide zur Verfügung stehenden Torhüter Bodo heißen, gibt es eigentlich nur eine Möglichkeit, denn Bodo spielt laut Aufgabenstellung immer...). Da diese Möglichkeiten noch kombiniert werden müssen, um jeweils eine vollständige Mannschaft zu erhalten, werden nach dem Multiplikationsprinzip die Teilergebnisse multipliziert:
Der FC kann auf $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{2}{1} = \mathbf{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2} = \mathbf{400}$ **Arten** eine Mannschaft bilden.

Ü20:

a)

Für jede der 8 Lampen gibt es zwei Möglichkeiten: entweder an oder aus. Da die Möglichkeiten für die einzelnen Lampen kombiniert werden müssen, werden nach dem Multiplikationsprinzip die Teilergebnisse multipliziert:
Es gibt $\mathbf{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \mathbf{2^8} =$ **256 viele Beleuchtungsarten** (dabei wird auch die „Beleuchtungsart" mitgezählt, bei der alle Lampen aus sind).

b)

Wenn genau 5 der 8 Lampen brennen sollen, müssen aus 8 Lampen 5 ohne Wiederholung (eine Lampe kann nicht mehrfach ausgewählt werden) und ohne Berücksichtgung der Reihenfolge (für die Beleuchtung ist es nicht relevant, in welcher Reihenfolge die jeweiligen Lampen ausgewählt wurden) ausgesucht werden. Nach Grundaufgabe 3 gibt es dafür $\binom{8}{5}$ Möglichkeiten, es gibt somit $\binom{8}{5} =$ **56 Beleuchtungsarten**.

c)

Wenn mindestens 5 Lampen brennen sollen, dann gibt es vier Fälle:
Es brennen 5 oder 6 oder 7 oder 8 Lampen.
Wenn 5 Lampen brennen, gibt es dafür nach b) $\binom{8}{5}$ Möglichkeiten, für 6 Lampen ergeben sich mit denselben Überlegungen $\binom{8}{6}$, für 7 gibt es $\binom{8}{7}$ und für 8 Lampen $\binom{8}{8}$ Möglichkeiten. Jedes Teilergebnis stellt eine vollständige Lösung der Aufgabenstellung dar, da jeder Fall eine gewisse Anzahl von Beleuchtungsarten einschließt. Nach dem Additionsprinzip werden die Teilergebnisse daher addiert:
Es gibt $\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8} = 56+28+8+1 =$ **93 Beleuchtungsarten**.

Ü21:

Diese Aufgabe läßt sich in kein Schema pressen und auch ein Anwenden von Formeln ist hier nicht ohne weiteres möglich.

a)

Betrachtet wird eine Gleichung der Form $a+b = n$ mit $a,b \in \mathbb{N}$.
Der einfachere Fall ii) soll als erstes untersucht werden:

ii) a kann alle Werte zwischen 1 und n–1 annehmen. b ist dann genau die Differenz n–a und nimmt die Werte von n–1 bis 1 an. Wenn die Reihenfolge berücksichtigt werden soll, ist z.B. $a = n-1$ und $b = 1$ eine andere Möglichkeit als $a = 1$ und $b = n-1$. Daher steht jede Zahl, die a annehmen kann, für eine additive Zerlegung von n und es gibt somit **n - 1 Zerlegungen**.

i) Man kann a - beginnend mit 1 - schrittweise um 1 erhöhen. In dem gleichen Maß wird b geringer, man nennt das gegensinniges Verändern. Folgende Paare (a,b) ergeben sich (1,n–1), (2,n–2), ...
Irgendwann nimmt b einen Wert an, den schon a belegt hatte, und ab diesem Zeitpunkt treten nur noch Paare auf, die in umgekehrter Reihenfolge bereits vorhanden sind (es kommt z.B. (7,5) vor, und (5,7) wurde bereits gebildet). Da die Reihenfolge bei ii) nicht berücksichtigt werden soll, werden diese Zerlegungen nicht mehr gezählt.

Da sich a und b gegensinnig verändern, muß man a solange erhöhen, bis man den Wert $\frac{n}{2}$ überschreitet (der/die Leser(in) mache sich das an einem Beispiel klar). Ist n gerade, gibt es bis dahin $\frac{n}{2}$ viele Zahlen, für n ungerade beträgt ihre Anzahl $\frac{n-1}{2}$.

Puh, das war ziemlich schwer und ist (zum Glück) auch keine typische Kombinatorikaufgabe... (Wer jetzt immer noch nicht genug hat, der stürze sich auf den Aufgabenteil b), der noch ein wenig schwieriger ist.)
Gut zu erkennen bei dieser Aufgabe ist allerdings, daß man hier sehr viel mit inhaltlichen Überlegungen arbeiten muß und ein direkter Rückgriff auf die Grundaufgaben nicht möglich ist, obgleich die Aufgabenstellung dieses nahelegt.

b)
Bei drei Summanden ist die Gleichung $a+b+c = n$ zu betrachten. Da a, b und c natürliche Zahlen sind, ist es möglich, sie jeweils als <u>Summe von Einsen</u> darzustellen:

$$\text{z.B.: } a = \underbrace{1+1+...+1}_{a\text{-viele}}$$

Damit läßt sich n wie folgt schreiben:

$$n = a+b+c = \underbrace{(1+1+...+1)}_{a\text{-viele}}+\underbrace{(1+1+...+1)}_{b\text{-viele}}+\underbrace{(1+1+...+1)}_{c\text{-viele}}$$

n läßt sich dann auch so schreiben:

$$\underbrace{\overbrace{1+1+...+1}^{a\text{- viele}}+\text{Ï}\,\overbrace{1+1+...+1}^{b\text{-viele}}+\text{Ï}\,\overbrace{1+1+...+1}^{c\text{-viele}}}_{n\text{-viele}}$$

Jede Aufteilung von n in Summanden läßt sich somit als <u>Summe von</u> n <u>Einsen</u> darstellen, wobei 2 Trennungsstriche zwischen die Einsen gesetzt werden, um die Verteilung der Einsen hinsichtlich der drei einzelnen Summanden anzudeuten. Jede Versetzung der Trennungsstriche bedeutet eine andere Verteilung der Einsen auf die Summanden und damit eine andere Zerlegung von n in Summanden (bei Berücksichtigung der Reihenfolge).
Da a, b und c natürliche Zahlen sind, gehört zu jedem Summand mindestens eine 1. Damit können die Trennungsstriche zwischen den Einsen frei plaziert werden - nur links und rechts von den Einsen dürfen sie nicht stehen (man kann sich das so vorstellen, daß die Trennungsstriche überall dort plaziert werden können, wo in der Summe ein Pluszeichen steht.
Die Trennungsstriche können damit auf (n–1)-viele Plätze gesetzt werden. Davon sind 2 ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (Trennungsstriche nicht unterscheidbar) auszuwählen.

Dies ist nach Grundaufgabe 4 auf $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)!}{(n-3)!\cdot 2!} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Arten möglich.

Ü22:

a)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!} \qquad \text{(def. Binomialkoeffizient)}$$

Bevor die Brüche addiert werden können, müssen sie gleichnamig gemacht werden (vgl. Kap. 1.3). Dazu ist zunächst der <u>Hauptnenner</u> zu bestimmen.

Es gilt: $(k+1)! = k!\cdot(k+1)$ und $(n-k)! = (n-k-1)!\cdot(n-k)$ ☠

[Man mache sich das mit Hilfe der Definition Fakultät klar.]

Daher ergibt sich für den Hauptnenner $(n-k)!\cdot(k+1)!$

$$= \frac{n!\cdot(k+1)}{(n-k)!\cdot k!\cdot(k+1)} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(n-(k+1))!\cdot(n-k)\cdot(k+1)!}$$

$$= \frac{n!\cdot(k+1)}{(n-k)!\cdot(k+1)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(n-k)!\cdot(k+1)!} \qquad (☠)$$

$$= \frac{n!\cdot(k+1) + n!\cdot(n-k)}{(n-k)!\cdot(k+1)!}$$

$$= \frac{n!\cdot(k+1+(n-k))}{(n-k)!\cdot(k+1)!} \qquad \text{(DIST)}$$

$$= \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-k)!\cdot(k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} \qquad \text{(def. Fakultät)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\cdot(k+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{(def. Binomialkoeffizient)}$$

<u>Bemerkung</u>:
Die Idee zu der Umformung des Nenner des Bruches in der zweitletzten Zeile erhält man, wenn man $\binom{n+1}{k+1}$ nach Definition auflöst.

Am Pascalschen Dreieck zeigt sich die oben bewiesene Aussage darin, daß sich jeweils zwei in einer Zeile nebeneinanderstehende Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$ zu dem in der Mitte darunterstehenden $\binom{n+1}{k+1}$ addieren.

Oder anders gewendet:
Der Binomialkoeffizient an der (k+1)-ten Stelle in der (n+1)-ten Zeile entspricht der Summe der über ihm liegenden Koeffizienten in der n-ten Zeile.

b)
Die Eigenschaft $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ weist darauf hin, daß die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck symmetrisch angeordnet sind (zu einer Symmetrieachse, die senkrecht durch die mittleren Binomialkoeffizienten verläuft).
Diese Symmetrie läßt sich bei vielen Rechnungen ausnutzen: Beispielsweise liegt nahe, daß $\binom{5}{1} = 5$ gilt, da es für die Auswahl von einer Sache aus fünf Sachen 5 Möglichkeiten gibt. Aufgrund der Symmetrie gilt dann auch:
$\binom{5}{4} = 5$.

Ü23:

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \frac{(k+(n-1))!}{(k+(n-1)-(n-1))!\cdot(n-1)!} \qquad \text{(def. Binomialkoeffizient)}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-k)!\cdot k!} \qquad \text{(KOM „}\cdot\text{“)}$$

$$= \binom{n+k-1}{k} \qquad \text{(def. Binomialkoeffizient)}$$

Ü24:
a)
Jeder der kürzesten Weg von X nach Y hat 6 „Schritte“ (oder „Teilwege“) Von diesen 6 Schritten müssen insgesamt 4 nach rechts (r) und 2 nach oben (o) gemacht werden.
Man erhält damit für jeden Weg einen 6-Tupel mit 4 r und 2 o. Sind die 4 r auf den Tupel verteilt, kommen die beiden o auf die frei gebliebenen Plätze und umgekehrt. D.h. weiß man, wann man nach rechts gehen muß, dann ist auch klar, wann nach oben gegangen werden muß, und umgekehrt.
Es genügt also zu bestimmen, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus 6 Plätzen 4 auszuwählen, die mit r's besetzt werden (oder 2, auf welche die o's plaziert werden). Die Auswahl verläuft ohne Wiederholung (da ein Platz nicht mehrfach für die Plazierung von r's ausgewählt werden kann) und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (da die r's untereinander nicht unterscheidbar sind), so daß hier die beliebte Grundaufgabe 4 und die Formel $\binom{n}{k}$ zur Anwendung kommt:
Es gibt $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten für die Plazierung der r's und damit **15 verschiedene kürzeste Wege** von X nach Y.

<u>Bemerkung:</u>
Für die Plazierung der o's hätte man $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten erhalten, also genauso viele Wege, da gilt $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$ (vgl. Ü22 b)).

b)
Analog zu a) berechnet man hier alle Möglichkeiten für die Plazierung von 9 r's auf 15 Stellen und erhält $\binom{15}{9}$ = **5005 verschiedene kürzeste Wege** von X nach Z.

c)
Alle Möglichkeiten von X nach Z zu kommen, ohne über Y zu gehen, ergeben sich, wenn man von allen möglichen Wegen von X nach Z (soeben unter b) berechnet), diejenigen herausnimmt, die über Y laufen. Zuerst muß daher berechnet werden, wie viele Möglichkeiten es gibt, von X nach Z über Y zu laufen. Dazu kombiniert man alle Möglichkeiten für Wege von X nach Y mit denjenigen für Wege von Y nach Z. Von X nach Y gibt es nach Aufgabenteil a) $\binom{6}{4}$ = 15 verschiedene kürzeste Wege, von Y nach Z gibt es mit analoger Argumentation $\binom{9}{5}$ = 126 verschiedene kürzeste Wege. Da nun jeder Weg von X nach Y mit einem Weg von Y nach Z kombiniert werden kann, müssen nach dem <u>Multiplikationsprinzip</u> die Teilergebnisse multipliziert werden: Es gibt $15 \cdot 126 = 1890$ verschiedene Wege kürzeste Wege von X nach Z über Y.
Nach obigen Überlegungen muß die Anzahl dieser Wege noch von derjenigen aller kürzesten Wege von X nach Z subtrahiert werden, und so erhält man $5005 - 1890 =$ **3115 verschiedene kürzeste Wege** von X nach Z, ohne über Y zu gehen.