Lösungen der Übungsaufgaben zu **Kapitel 1**

Ü1:

a)
$$\begin{aligned} 6\cdot 8 &= 6\cdot(2\cdot 4) \\ &= (6\cdot 2)\cdot 4 && \text{(ASS „}\cdot\text{“)} \\ &= 12\cdot 4 \\ &= 4\cdot 12 && \text{(KOM „}\cdot\text{“)} \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\cdot 8 &= 6\cdot(4\cdot 2) \\ &= (6\cdot 4)\cdot 2 && \text{(ASS „}\cdot\text{“)} \\ &= 24\cdot 2 \\ &= 48 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3\cdot 8 = 24 &\Rightarrow 2\cdot(3\cdot 8) = 2\cdot 24 && \text{(Eig. „=“)} \\ &\Rightarrow (2\cdot 3)\cdot 8 = 2\cdot 24 && \text{(ASS „}\cdot\text{“)} \\ &\Rightarrow 6\cdot 8 = 48 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 6\cdot 4 = 24 &\Rightarrow (6\cdot 4)\cdot 2 = 24\cdot 2 && \text{(Eig. „=“)} \\ &\Rightarrow 6\cdot(4\cdot 2) = 48 && \text{(ASS „}\cdot\text{“)} \\ &\Rightarrow 6\cdot 8 = 48 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6\cdot 8 &= (2+4)\cdot 8 \\ &= 2\cdot 8 + 4\cdot 8 && \text{(DIST „}\cdot\text{“ bzgl. „+“)} \\ &= 16+32 \\ &= 48 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 6\cdot 8 &= 6\cdot(6+2) \\ &= 6\cdot 6 + 6\cdot 2 && \text{(DIST „}\cdot\text{“ bzgl. „+“)} \\ &= 36+12 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Ü2:

Verbale Formulierung eines verallgemeinerten Distributivgesetzes:

Aus jeder Summe von Produkten, die jeweils einen gleichen Faktor enthalten, läßt sich dieser Faktor <u>ausklammern</u>.

Umgekehrt wird eine Summe mit einer Zahl multipliziert, indem <u>jeder einzelne Summand</u> mit dieser Zahl multipliziert wird und die Produkte anschließend addiert werden.

Ü3:

a) $75+100a+35b+15c = 5(15+20a+7b+3c)$

b) $105a^2-13b+10 = 5(21a^2-\frac{13}{5}b+2)$

c) $a^3+20b-100 = 5(\frac{1}{5}a^3+4b-20)$

Ü4:

a) $a^4-7a^2+38a = a(a^3-7a+38)$

b) $4a^2b+27ab^2-3c^3 = a(4ab+27b^2-\frac{3c^3}{a})$ für $a \neq 0$

c) $119b^3-38ab+120 = a(\frac{119b^3}{a}-38b+\frac{120}{a})$ für $a \neq 0$

Ü5:

a) $(a+2)\cdot a^2+(a+2)^3-(a^2-4) = (a+2)\cdot a^2+(a+2)(a+2)^2-(a+2)(a-2)$
$= (a+2)\left(a^2+(a+2)^2-(a-2)\right)$

b) $b^2a+2b = (a+2)\,\frac{b^2a+2b}{a+2} = (a+2)\,\frac{b(ba+2)}{a+2}$ für $a \neq -2$

Man beachte, daß man den Bruch nicht weiter kürzen kann, da aus b^2a+2b nur b und nicht a+2 ausgeklammert werden kann (ohne, daß wieder ein Bruch entsteht). Achtung! Es kann nicht durch 2 oder a gekürzt werden, denn aus Summen kürzen ...

c) $4\cdot(a+2)+7+8a+16 = 4\cdot(a+2)+7+8(a+2)$
$= (a+2)\,(4+\frac{7}{a+2}+8) = (a+2)\,(12+\frac{7}{a+2})$ für $a \neq -2$

Ü6:

a) $\frac{3x^2}{12x}+\frac{6x}{21} = \frac{1}{4}x+\frac{2}{7}x = (\frac{1}{4}+\frac{2}{7})x = (\frac{7}{28}+\frac{8}{28})x = \frac{15}{28}x$ für $x \neq 0$

b) $\frac{t}{t-u} - \frac{u}{t^2-u^2} = \frac{t(t+u)-u}{t^2-u^2} = \frac{t^2+tu-u}{t^2-u^2}$ für $|t| \neq |u|$

c) $\frac{2a}{(a+b)^2} : \frac{a^2}{3a+3b} = \frac{2a(3a+3b)}{(a+b)^2\cdot a^2} = \frac{2(3a+3b)}{(a+b)^2\cdot a} = \frac{6(a+b)}{(a+b)^2\cdot a} = \frac{6}{(a+b)\cdot a}$ für $a \neq -b$

d) $\frac{-36u^2+v^2}{18uv}\cdot\frac{24v^2}{v-6u} = \frac{(v+6u)(v-6u)\,24v^2}{18uv\,(v-6u)} = \frac{(v+6u)\,4v}{3u}$ für $u,v \neq 0 \wedge v \neq 6u$

Ü7:

a) $(s^6-s^4)\cdot s^{n-3} = s^6\cdot s^{n-3} - s^4\cdot s^{n-3} = s^{n+3} - s^{n+1}$

b) $\frac{a^2\cdot 3a}{a^3\cdot 6a} = \frac{1}{2a}$ für $a \neq 0$

c) $\frac{b^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{5}}}{ab^2} = \frac{b^{\frac{13}{15}}}{ab^2} = \frac{b^{\frac{13}{15}-2}}{a} = \frac{b^{-\frac{17}{15}}}{a} = \frac{1}{ab^{\frac{17}{15}}}$ für $a,b \neq 0$

d) $\frac{\frac{x^2-1}{2x-4}}{\frac{1-x}{x^2-4x+4}} = \frac{x^2-1}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4x+4}{1-x} = \frac{(x+1)(x-1)\,(x-2)^2}{2(x-2)\,(1-x)} = \frac{(x+1)(-1)(1-x)\,(x-2)}{2\,(1-x)}$
$= \frac{(x+1)(-1)(x-2)}{2} = \frac{(x+1)(2-x)}{2}$ für $x \neq 2,\ x \neq 1$

e) $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$

f) $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

Ü8:

Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ beliebig mit $a = b$ und $c = d$.

$$
\begin{array}{llll}
a = b & \Rightarrow & a-c = b-c & \text{(Eig. „=“)} \quad (\heartsuit) \\
c = d & \Rightarrow & c-b = d-b & \text{(Eig. „=“)} \\
 & \Rightarrow & (-1)\,(c-b) = (-1)\,(d-b) & \text{(Eig. „=“)} \\
 & \Rightarrow & b-c = b-d & \text{(DIST, KOM)} \quad (\diamondsuit)
\end{array}
$$

Aus $\heartsuit$ und $\diamondsuit$ folgt wegen TRANS „=“: $a-c = b-d$.

Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ beliebig mit $a = b$ und $c = d$.

$$
\begin{array}{llll}
a = b & \Rightarrow & a \cdot c = b \cdot c & \text{(Eig. „=“)} \quad (\clubsuit) \\
c = d & \Rightarrow & c \cdot b = d \cdot b & \text{(Eig. „=“)} \\
 & \Rightarrow & b \cdot c = b \cdot d & \text{(KOM „·“)} \quad (\spadesuit)
\end{array}
$$

Aus $\clubsuit$ und $\spadesuit$ folgt wegen TRANS „=“: $a \cdot c = b \cdot d$.

Ü9:

$$
\left| \begin{array}{l} 25 = a+b \\ a = 49b \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 25 = 49b+b \\ a = 49b \end{array} \right| \quad \text{(2. Gleichung in 1. eingesetzt)}
$$

$$
\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 25 = 50b \\ a = 49b \end{array} \right| \quad \text{(DIST)}
$$

$$
\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b = 0{,}5 \\ a = 49b \end{array} \right| \quad \text{(KÜRZ „=“ bzgl. „·“)}
$$

$$
\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b = 0{,}5 \\ a = 24{,}5 \end{array} \right| \quad \text{(1. Gleichung in 2. eingesetzt)}
$$

$$
\Leftrightarrow \mathbb{L}_{a,b} = \{(24{,}5\,;\,0{,}5)\}
$$

Ü10:

$$
\begin{array}{lrcll}
 & (x+\frac{2}{3}x)-\frac{1}{3}\,(x+\frac{2}{3}x) & = & 10 & \\
\Leftrightarrow & (x+\frac{2}{3}x)\,(1-\frac{1}{3}) & = & 10 & \text{(DIST)} \\
\Leftrightarrow & \frac{2}{3}(x+\frac{2}{3}x) & = & 10 & \text{(KOM „·“)} \\
\Leftrightarrow & (x+\frac{2}{3}x) & = & 15 & \\
\Leftrightarrow & \frac{5}{3}x & = & 15 & \\
\Leftrightarrow & x & = & 9 & \\
\Leftrightarrow & \mathbb{L}_x = \{9\} & & &
\end{array}
$$

Ü11:

$$
\begin{aligned}
& 6x + \frac{17-3x}{5} - \frac{4x+2}{3} &&= 5 + \frac{7x+14}{3} \\
\Leftrightarrow\ & 6x + \frac{17-3x}{5} - \frac{4x+2}{3} - \frac{7x+14}{3} &&= 5 \\
\Leftrightarrow\ & 6x + \frac{17-3x}{5} - \frac{4x+2+7x+14}{3} &&= 5 \\
\Leftrightarrow\ & 6x + \frac{17-3x}{5} - \frac{11x+16}{3} &&= 5 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{90x+51-9x-55x-80}{15} &&= 5 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{26x-29}{15} &&= 5 \\
\Leftrightarrow\ & 26x - 29 &&= 75 \\
\Leftrightarrow\ & 26x &&= 104 \\
\Leftrightarrow\ & x &&= \frac{52}{13} \\
\Leftrightarrow\ & x &&= 4 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{L}_x = \{4\}
\end{aligned}
$$

Ü12:

Seien $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad & \Rightarrow & ad &= cb && \text{(Eig. „=“)} \\
& \Rightarrow & ad+ab &= cb+ab && \text{(Eig. „=“)} \\
& \Rightarrow & a(d+b) &= b(c+a) && \text{(DIST)} \\
& \Rightarrow & \frac{a}{b} &= \frac{a+c}{b+d} && \text{(KOM „+“, Eig. „=“)}
\end{aligned}
$$

? t

Ü13:

$$
\left|\begin{array}{l} 4\cdot e + 6\cdot m = 494 \\ e + m = 88 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 4\cdot(88-m) + 6\cdot m = 494 \\ e = 88 - m \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 352 + 2\cdot m = 494 \\ e = 88 - m \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m = 71 \\ e = 17 \end{array}\right|
$$

17 Rüssel gehören den Elefanten und 71 den Mücken.

Ü14:

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{array}{l} 18x - 5y = 6 \\ 7y + 8 = 18x \end{array}\right| \quad & \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 18x - 5y = 6 \\ 18x = 7y + 8 \end{array}\right| && (\text{SYM "="}) \\
& \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 18x - 5y = 6 \\ -5y = 6 - 7y - 8 \end{array}\right| && \left(\begin{array}{l} \text{2. von 1. Gleichung} \\ \text{subtrahiert} \end{array}\right) \\
& \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 18x - 5y = 6 \\ 2y = -2 \end{array}\right| && (\text{2. Gleichung} : \backslash +7y)
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 18x-5y=6 \\ y=-1 \end{array} \right| \qquad (2.\text{ Gleichung} \backslash :2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 18x-5(-1)=6 \\ y=-1 \end{array} \right| \qquad \left(\begin{array}{l} 2.\text{ Gleichung in} \\ 1.\text{ Gleichung eingesetzt} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 18x=1 \\ y=-1 \end{array} \right| \qquad (1.\text{ Gleichung:} \backslash -5)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x=\frac{1}{18} \\ y=-1 \end{array} \right| \qquad (1.\text{ Gleichung:} \backslash :18)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{L}_{x,y} = \left\{ \left(\frac{1}{18}, -1 \right) \right\}$$

Ü15:

$$\begin{array}{lccl} & (n-1)(n+1) & = & 483 \\ \Leftrightarrow & n^2-1 & = & 483 \\ \Leftrightarrow & n^2 & = & 484 \\ \Leftrightarrow & |n| & = & \sqrt{484} \\ \Leftrightarrow & n=22 \ \vee \ n=-22 & & \\ \Leftrightarrow & \mathbb{L}_n = \{-22, 22\} & & \end{array}$$

Ü16:

Die einzige Möglichkeit der Faktorisierung mit realistischen Zahlen lautet:

$$5291 = 11 \cdot 13 \cdot 37$$
$$3913 = 7 \cdot 13 \cdot 43$$

Die weiblichen Familienmitglieder sind also 11, 13 und 37 Jahre alt und die männlichen 7, 13 und 43 Jahre alt. Die Zwillinge sind also unterschiedlichen Geschlechts.

Ü17:

$$\begin{array}{lccl} & 6b & = & (6+4)(b-1) \\ \Leftrightarrow & 6b & = & 10b-10 \\ \Leftrightarrow & 10 & = & 4b \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{2} & = & b \end{array}$$

Die andere Seite ist 2,5cm lang.

Ü18:

$$\begin{array}{lccl} & (2x-5)(x+3) & = & 2x^2-(3x-4)+9 \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow & 2x^2+6x-5x-15 & = & 2x^2-3x+4+9 \\ \Leftrightarrow & x-15 & = & -3x+13 \\ \Leftrightarrow & 4x & = & 28 \\ \Leftrightarrow & x & = & 7 \\ \Leftrightarrow & \mathbb{L}_x = \{7\} & & \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{lrcl} & (2\cdot 7-5)\,(7+3) & = & 2\cdot 7^2-(3\cdot 7-4)+9 \\ \Leftrightarrow & 9\cdot 10 & = & 98-17+9 \\ \Leftrightarrow & 90 & = & 81+9 \\ \Leftrightarrow & 90 & = & 90 \quad \text{(w)} \end{array}$$

Ü19:

$((5x+2)\cdot 4+3)\cdot 5 = (20x+8+3)\cdot 5 = 100x+55$

Von dem Ergebnis muß man also 55 subtrahieren und dann die erhaltene Zahl durch 100 teilen.

Oder pragmatischer:
Man erhält die gesuchte Zahl, indem man vom errechneten Ergebnis die beiden letzten Ziffern (55) wegläßt.

Beispiel: x sei die gesuchte Zahl, 1755 die errechnete. Also ist $x = 17$.

Ü20:

$$\begin{array}{lrcl} & 3x+3 & = & 3^3-3x \\ \Leftrightarrow & 6x & = & 27-3 \\ \Leftrightarrow & 6x & = & 24 \\ \Leftrightarrow & x & = & 4 \\ \Leftrightarrow & \mathbb{L}_x = \{4\} & & \end{array}$$

Ü21:

$$\left|\begin{array}{l} a+b = 4 \\ 3a-2b = 52 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 4-b \\ 3(4-b)-2b = 52 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 4-b \\ 12-5b = 52 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 4-b \\ 5b = -40 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 12 \\ b = -8 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{L}_{a,b} = \{(12, -8)\}$$

Ü22:

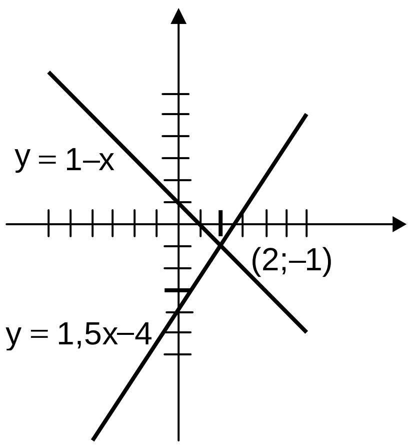
$$\left|\begin{array}{r} x+y = 1 \\ 3x-2y = 8 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} x = 1-y \\ 3(1-y)-2y = 8 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} x = 1-y \\ 3-5y = 8 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} x = 1-y \\ -5 = 5y \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{L}_{x,y} = \{(2, -1)\}$$



Die Geradengleichungen erhält man, indem man die Gleichungen nach y auflöst. Der Schnittpunkt der beiden Geraden gibt das Lösungspaar (x,y) an, das <u>beide</u> Gleichungen löst.

Ü23:

$$\left|\begin{matrix} 3ax + y = 7a \\ ax + y = 3a \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 3ax + 3a - ax = 7a \\ y = 3a - ax \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 2ax = 4a \\ y = 3a - ax \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x = 2 \\ y = a \end{matrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{L}_{x,\,y} = \{(2,a)\}$$

Ü24:

Alle multiplikativen Zerlegungen von 36 in 3 Faktoren sind:

$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36$	$1+1+36 = 38$	
$36 = 1 \cdot 2 \cdot 18$	$1+2+18 = 21$	
$36 = 1 \cdot 3 \cdot 12$	$1+3+12 = 16$	
$36 = 1 \cdot 4 \cdot 9$	$1+4+9 = 14$	
$36 = 1 \cdot 6 \cdot 6$	**1+6+6 = 13**	
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$	**2+2+9 = 13**	**2+2+9 = 13**
$36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$	$2+3+6 = 11$	
$36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$	$3+3+4 = 10$	

Es kommen nur noch die beiden fettgedruckten Möglichkeiten in Frage, da sich nur hier gleiche Summen ergeben, das heißt die Summe 13 ist die einzige Möglichkeit, bei der die Kenntnis der Hausnummer (und damit der Summe) nicht ausreicht (man kann davon ausgehen, daß A die Hausnummer seines Nachbars kennt).

Da es aber eine älteste Nichte gibt, ist die Zerlegung 1+6+6 ausgeschlossen und es kommt nur der Fall 2+2+9 in Frage, also der Fall, daß die älteste 9 Jahre alt ist und die beiden anderen jeweils 2 Jahre alt sind.

Ü25:

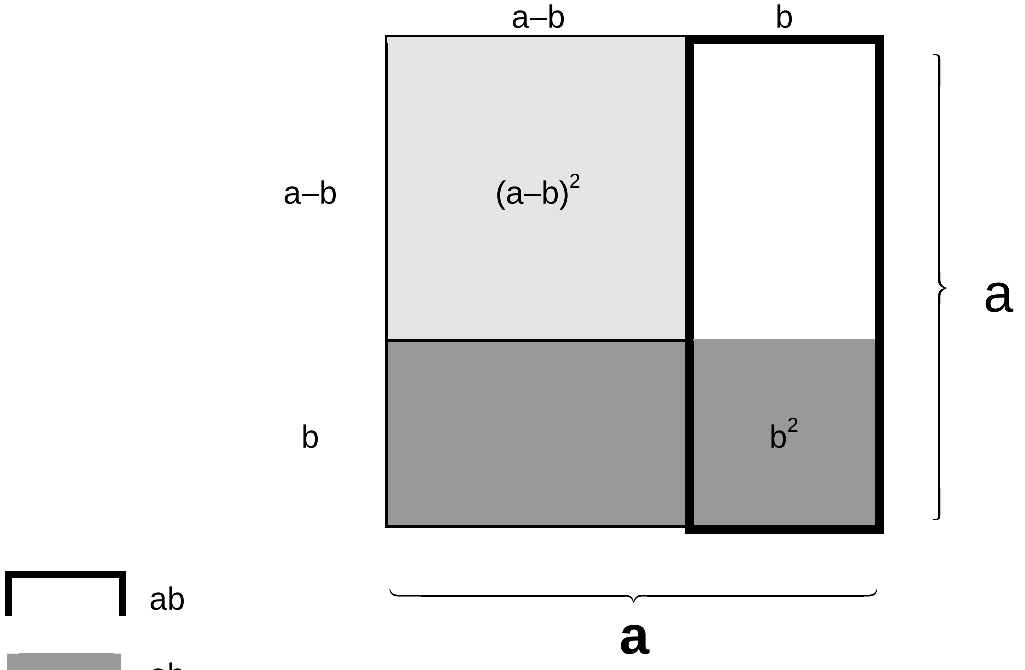
2. binomische Formel:

a) Algebraisch:

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt.

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)\,(a-b) \\
&= (a-b) \cdot a - (a-b) \cdot b && \text{(DIST)} \\
&= a \cdot (a-b) - b \cdot (a-b) && \text{(KOM „}\cdot\text{“)} \\
&= a \cdot a - a \cdot b - (b \cdot a - b \cdot b) && \text{(DIST)} \\
&= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b \\
&= a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2 && \text{(KOM „}\cdot\text{“)} \\
&= a^2 - 2a \cdot b + b^2
\end{aligned}$$

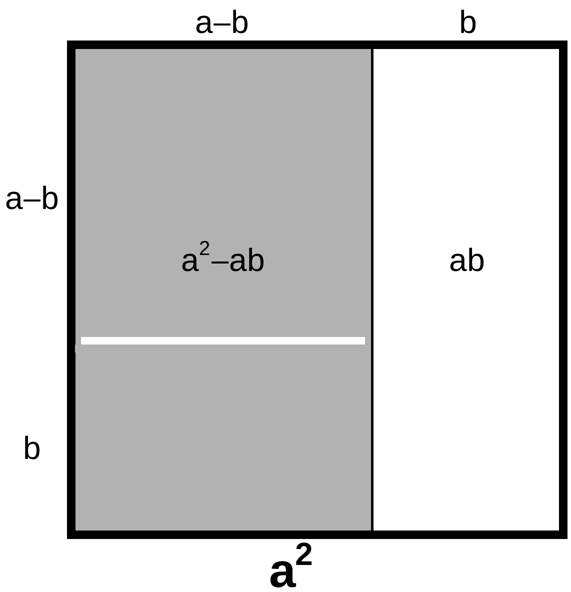
b) Geometrisch:



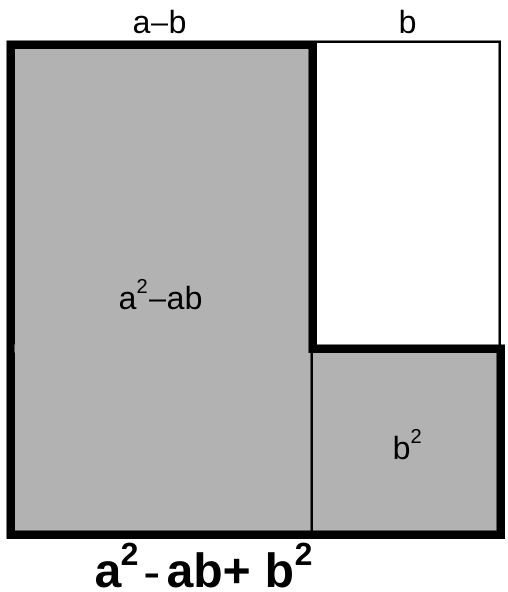
Man erkennt, daß b^2 sowohl Teil von dem dick umrandeten Teil „ab“, als auch von dem grauen Teil „ab“ ist. Wenn man nun beide „ab´s“ von a^2 abziehen will, muß man, nachdem man das erste „ab“ abgezogen hat, b^2 wieder dazutun, da dieses Stück ja jetzt zum zweiten „ab“ fehlt.

Da dieser geometrische Beweis recht unübersichtlich ist, sei er hier in mehreren Diagrammen dargestellt:

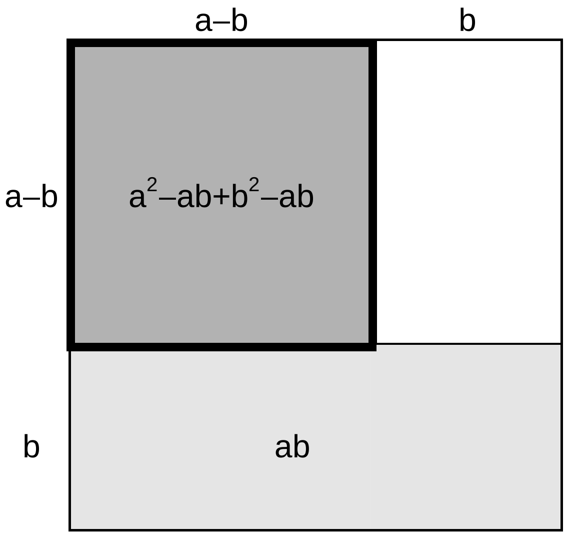
1. Schritt:



2. Schritt:



3. Schritt:



<u>3. binomische Formel:</u>

a) Algebraisch:

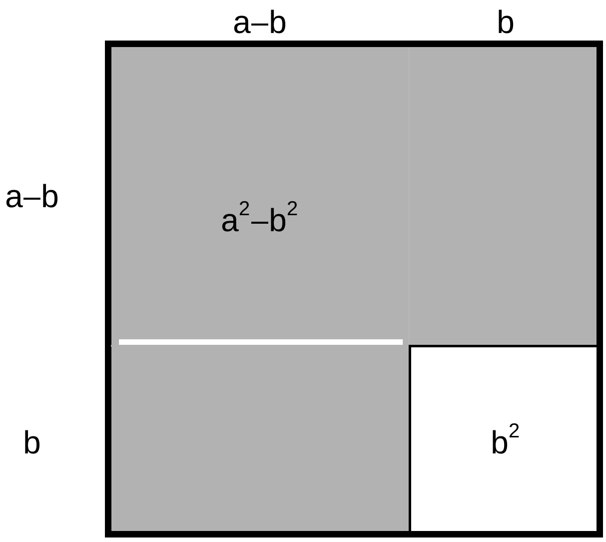
Seien $a,b \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt.

$(a-b)\,(a+b)$	$=$	$(a-b) \cdot a + (a-b) \cdot b$	(DIST)
	$=$	$a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b)$	(KOM „·“)
	$=$	$a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$	(DIST)
	$=$	$a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2$	(KOM „·“)
	$=$	$a^2 - b^2$	

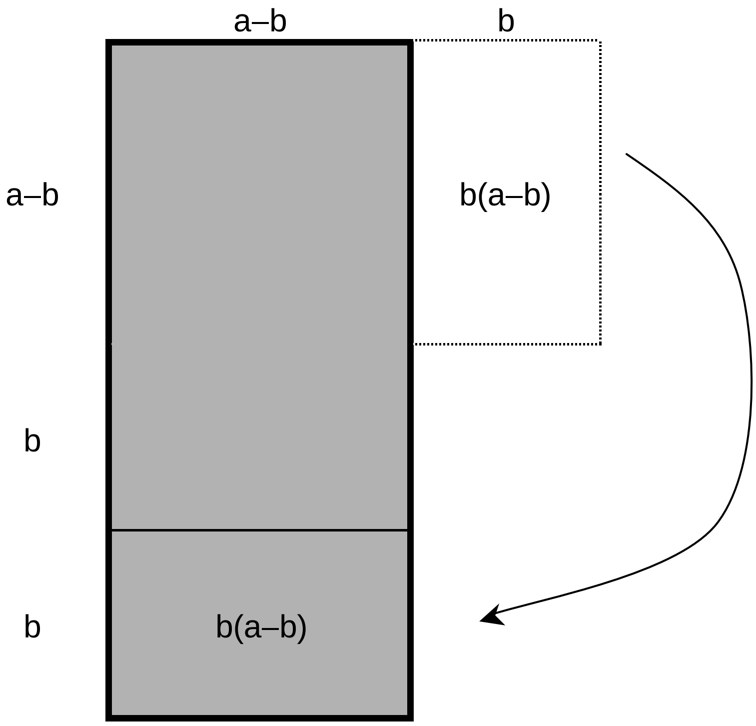
b) Geometrisch:

Auch hier wird wieder Schritt für Schritt vorgegangen:

1. Schritt:



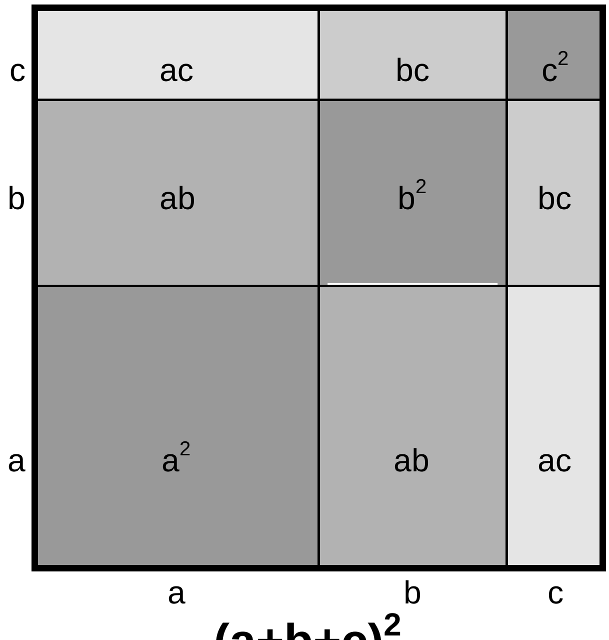
2. Schritt:



(a - b) (a+b)

Ü26:

$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+2ac+2bc+b^2+c^2$



$(a+b+c)^2$

Ü27:

$$
\begin{aligned}
3x^2 = 1-7x \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 1 + 7x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + \tfrac{7}{3}x - \tfrac{1}{3} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+\tfrac{7}{6})^2 - \tfrac{49}{36} - \tfrac{1}{3} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+\tfrac{7}{6})^2 - \tfrac{61}{36} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+\tfrac{7}{6} - \tfrac{\sqrt{61}}{6})\,(x+\tfrac{7}{6} + \tfrac{\sqrt{61}}{6}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{7-\sqrt{61}}{6} \;\vee\; x = -\tfrac{7+\sqrt{61}}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{L}_x = \{ -\tfrac{7-\sqrt{61}}{6}, -\tfrac{7+\sqrt{61}}{6} \}
\end{aligned}
$$

Ü28:

$x^2-2x+q = 0$ mit $q,x \in \mathbb{R}$.

Wie im großen GEPAD erläutert, hängt die Lösbarkeit einer quadratischen Gleichung von der Diskriminante d ab. Sie ist hier $d=1-q$ ($=\frac{p^2}{4} - q$). Es gibt keine Lösung für $q>1$, da dann $d<0$. Für $q<1$ gibt es zwei Lösungen, da dann $d>0$, und wenn $q=1$ gibt es keine Losung, da dann $d=0$.

Hier wird noch einmal an diesem konkreten Beispiel ausgeführt, wie man auf diese Gesetzmäßigkeit kommt:

$$
\begin{aligned}
x^2-2x+q = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 1 + q = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - (1-q) = 0
\end{aligned}
$$

1. Fall: $1-q > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \left((x-1) - \sqrt{1-q}\right)\left((x-1) + \sqrt{1-q}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \left(x-(1+\sqrt{1-q})\right)\left(x-(1-\sqrt{1-q})\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = 1+\sqrt{1-q} \;\vee\; x = 1-\sqrt{1-q}
\end{aligned}
$$

In diesem Fall gibt es also zwei Lösungen.

2. Fall: $1-q = 0$:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad (x-1)^2 - 0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = 1
\end{aligned}
$$

In diesem Fall gibt es also genau eine Lösung.

3. Fall: $1-q < 0$:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -(1-q) > 0 \\
&\Rightarrow \quad (x-1)^2 - (1-q) > 0
\end{aligned}
$$

Dies steht im Widerspruch zu „$(x-1)^2-(1-q) = 0$“.
In diesem Fall gibt es also keine Lösung.

Ü29:

$$\left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ x\cdot y+z^2=49 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ 8(z+2)+z^2=49 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ 8z+16+z^2=49 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ z^2+8z-33=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ (z+4)^2-49=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ (z+4-7)(z+4+7)=0 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ (z-3)(z+11)=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ z+2=y \\ z=3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=8 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right|$$

Der Fall $z=-11$ ist hier nicht möglich, da $z\in\mathbb{N}$.

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{L}_{x,y,z}=\{(8,\,5,\,3)\}$$

Ü30:

$$26-(x+3)^2 = (x-1)^2$$

Bevor man die Aufgabe auf vier Arten löst, kann die Gleichung noch vereinfacht werden.

$$\Leftrightarrow \quad 26-(x^2+6x+9) = x^2-2x+1$$
$$\Leftrightarrow \quad 16-2x^2-4x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 8-x^2-2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+2x-8 = 0$$

1. Quadratische Ergänzung:

$$x^2+2x-8 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+2x+1 = 9$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \quad |x+1| = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x=2 \ \vee\ x=-4 \qquad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L}_x=\{-4,\,2\}$$

2. pq-Formel:

$$p = 2 \qquad \wedge \qquad q = -8$$
$$\Rightarrow \quad x = -\tfrac{2}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{2}{2}\right)^2+8} \qquad \vee \qquad x = -\tfrac{2}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{2}{2}\right)^2+8}$$
$$\Rightarrow \quad x = -1+\sqrt{9} \qquad \vee \qquad x = -1-\sqrt{9}$$
$$\Rightarrow \quad x = 2 \qquad \vee \qquad x = -4$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_x=\{-4,\,2\}$$

3. Dritte binomische Formel:

$$
\begin{aligned}
& x^2+2x-8 &&= 0\\
\Leftrightarrow\; & (x^2+2x+1)-9 &&= 0\\
\Leftrightarrow\; & (x+1)^2-9 &&= 0\\
\Leftrightarrow\; & ((x+1)-3)\,((x+1)+3) &&= 0\\
\Leftrightarrow\; & (x-2)\,(x+4) &&= 0\\
\Leftrightarrow\; & x = 2 \quad \vee \quad x &&= -4\\
\Leftrightarrow\; & \mathbb{L}_x = \{-4, 2\}
\end{aligned}
$$

4. Satz von Vieta:

$$x_1 \cdot x_2 = -8 \quad \wedge \quad x_1+x_2 = -2$$

Durch Ausprobieren erhält man:

$$\Rightarrow \quad x_1 = -4 \quad \wedge \quad x_2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_x = \{-4, 2\}$$

Ü31:

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{m-\text{mal}}}{\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{m-\text{mal}}} = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{m\text{-mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Ü32:

a)

$$
\begin{aligned}
& x-2(1-x) &&< x\\
\Leftrightarrow\; & x-2+2x &&< x\\
\Leftrightarrow\; & 3x-2 &&< x\\
\Leftrightarrow\; & 2x-2 &&< 0\\
\Leftrightarrow\; & 2x &&< 2\\
\Leftrightarrow\; & x &&< 1\\
\Leftrightarrow\; & \mathbb{L}_x = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < 1\}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
& (2y+\tfrac{1}{2})\,(y-1) - \tfrac{1}{2}(y+1) &&> 2(y+1)^2\\
\Leftrightarrow\; & 2y^2-1{,}5y-0{,}5-0{,}5y-0{,}5 &&> 2y^2+4y+2\\
\Leftrightarrow\; & -2y-1 &&> 4y+2\\
\Leftrightarrow\; & -3 &&> 6y\\
\Leftrightarrow\; & -0{,}5 &&> y\\
\Leftrightarrow\; & \mathbb{L}_y = \{y \mid y \in \mathbb{Q} \wedge y < -0{,}5\}
\end{aligned}
$$

Ü33:

$$
\begin{aligned}
12-x > \tfrac{1}{3}(36-x)-1 \quad &\Leftrightarrow \quad 12-x > 12-\tfrac{1}{3}x-1\\
&\Leftrightarrow \quad 1 > \tfrac{2}{3}x\\
&\Leftrightarrow \quad x < \tfrac{3}{2}
\end{aligned}
$$

a) $\mathbb{L}_x = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge\ x < \frac{3}{2}\}$

b) $\mathbb{L}_x = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \ \wedge\ x < \frac{3}{2}\}$

c) $\mathbb{L}_x = \{1\}$

Ü34:

Vorüberlegungen:

$1! < 2^1$, denn	$1 < 2$
$2! < 2^2$, denn	$2 < 4$
$3! < 2^3$, denn	$6 < 8$
$4! > 2^4$, denn	$24 > 16$
$5! > 2^5$, denn	$125 > 32$

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 4} : (n! > 2^n)$

Bew.:

1. Sei $n = 4$:
   $n! = 4! = 24 \ \wedge\ 2^n = 2^4 = 16$
   Also gilt: $n! > 2^n$ für $n = 4$

2. Sei $n > 4$:
   Beweisidee:
   Beim Ausprobieren der ersten fünf Zahlen ist aufgefallen, daß ab n=4 bei jedem Schritt die linken Seite mit einer Zahl größer 4 multipliziert wird und die rechte Seite immer mit 2. Das heißt, daß die linke Seite bei jedem Schritt mit einer größeren Zahl multipliziert wird als die rechte. Da die linke Seite schon vorher größer war als die rechte, bleibt sie nun erst recht größer.

$$
\begin{aligned}
& n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n = 4! \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n > 2^4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n\\
\Rightarrow\ & n! > 2^4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n \qquad (\clubsuit)
\end{aligned}
$$

$2<5 \wedge 2<6 \wedge \ldots. \wedge 2<n$

Da diese Ungleichungen allesamt gelten, kann man nun mit Hilfe des Monotoniegesetzes (MON „<“ bzgl. „·“) diese sukzessiv multiplizieren. Die rechten Seiten gehen von 5 bis n. Das sind somit n–4 Zahlen, da ja die ersten vier Zahlen fehlen. Also hat man auch n–4 linke Seiten, nämlich n–4 Zweien, die miteinander multipliziert 2^{n-4} ergeben.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & 2^{n-4} < 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot n && \text{(MON „<“ bzgl. „·“)}\\
\Rightarrow\ & 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot n > 2^{n-4}\\
\Rightarrow\ & 2^4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot n > 2^4\cdot 2^{n-4} \quad (\spadesuit) && \text{(MON „<“ bzgl. „·“)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\clubsuit) \wedge (\spadesuit) \ \Rightarrow\ & n! > 2^4 \cdot 2^{n-4} && \text{(TRANS „>“)}\\
\Rightarrow\ & n! > 2^{4+n-4} && \text{(PG)}\\
\Rightarrow\ & n! > 2^n
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Dieser Beweis ist formal nicht ganz korrekt, denn wegen der „...“ wird unterstellt, daß „es immer so weiter geht“. Deshalb wäre ein Beweis mit Hilfe der 🕮 Vollständigen Induktion hier angemessen. Diese Beweisform ist allerdings in diesem Kapitel noch nicht thematisiert worden.

Ü35:

a) Beh.: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}: (a < b \Rightarrow a+c < b+c)$

Bew.: Seien $a,b,c \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

$$
\begin{array}{lll}
a < b \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (\quad a+n = b) & & \text{(def. „<“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: ((a+n)+c = b+c) & & \text{(Eig. „=“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (a+(n+c) = b+c) & & \text{(ASS „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (a+(c+n) = b+c) & & \text{(KOM „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: ((a+c)+n = b+c) & & \text{(ASS „+“)} \\
\Rightarrow a+c < b+c & & \text{(def. „<“)}
\end{array}
$$

b) Beh.: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}:(a < b \Rightarrow a-c < b-c)$

Bew.: Seien $a,b,c \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

$$
\begin{array}{lll}
a < b \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (\quad a+n = b) & & \text{(def. „<“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: ((a+n)+(-c) = b+(-c)) & & \text{(Eig. „=“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (a+(n+(-c)) = b+(-c)) & & \text{(ASS „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (a+((-c)+n) = b+(-c)) & & \text{(KOM „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: ((a+(-c))+n = b+(-c)) & & \text{(ASS „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: ((a-c)+n = b-c) & & \\
\Rightarrow a-c < b-c & & \text{(def. „<“)}
\end{array}
$$

c) Beh.: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}:(a+c < b+c \Rightarrow a < b)$

Bew.: Seien $a,b,c \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt

$$
\begin{array}{lll}
a+c<b+c \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (\ (a+c)+n = b+c) & & \text{(def. „<“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (\ a+(c+n) = b+c) & & \text{(ASS „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (\ a+(n+c) = b+c) & & \text{(KOM „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (\ (a+n)+c = b+c) & & \text{(ASS „+“)} \\
\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: (\quad a+n = b) & & \text{(KÜRZ „=“ bzgl. „+“)} \\
\Rightarrow a < b & & \text{(def. „<“)}
\end{array}
$$

d) Beh.: Man darf Ungleichungen nicht voneinander subtrahieren.

Bew.: Sei $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 6$

Es gilt: $a < b$, denn $2 < 3$
$c < d$, denn $4 < 6$

Aber es gilt nicht: $a-c < b-d$, denn $-2 \nless -3$